Orgaan van de

Nederlandse Vereniging

van Wiskundeleraren

Euclides

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 74

1998-1999 februari

5



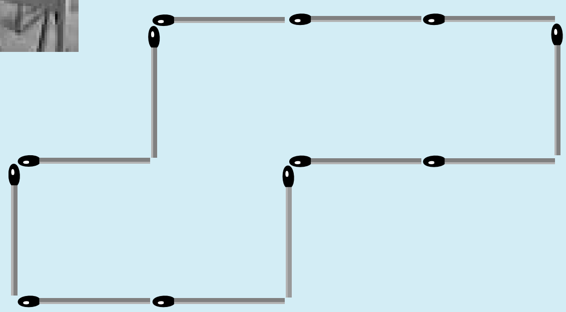






Praktische opdrachten: last of uitdaging?

Regionale NVvW-studiebijeenkomsten in april



EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem
e-mail: cph@xs4all.nl

Richtlijnen voor artikelen:
- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.
  Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:
- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.euronet.nl/~nvvw

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: mkommer@knoware.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8
8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail:
wkuipers@worldonline.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: NVvW@euronet.nl

Contributie per ver. jaar: ƒ 80,00
Studentleden: ƒ 40,00
Leden van de VVWL: ƒ 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer. Abonnementsprijs voor personen: ƒ 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ 240,00 per jaar. Betaling geschiedt per acceptgiro. Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891
e-mail lbozuwa@worldonline.nl

Adresgegevens auteurs

A.F.S. Aukema-Schepel
Buitenplaats 77
8212 AC Lelystad

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

F. Bosman
Cito
Postbus 1034
6801 MG Arnhem

L. van den Broek
Graafseweg 387
6832 ZN Nijmegen

M. Bruin
Teleac/NOT
Postbus 1070
1200 BB Hilversum

C.B. Hofstra
R. Pollemaplein 1
8802 RT Franeker

H. van Lint
Spiekerbrink 25
8034 RA Zwolle

S. Oortwijn
Graafseweg 387
6832 ZN Nijmegen

R. Reichardt
Educatief Centrum Rijnmond
Heemraadssingel 178
3021 DL Rotterdam

S. Schaafsma
Betuwepad 25
5691 LM Son

Inhoud



150



158



172



van de redactietafel

Waarom wordt er eigenlijk wiskundeonderwijs gegeven?

Dat was één van de vragen die naar voren kwam op een conferentie Wiskunde in het HBO. Deze conferentie werd op 8 januari jongstleden in Utrecht gehouden en was (mede) georganiseerd door de Vereniging.
Op zowel Heao's als Hto's wordt in toenemende mate vanuit het management de vraag gesteld aan de wiskundesecties wat hun vak eigenlijk bijdraagt aan de opleiding. Enkele jaren geleden nog was er een soort stilzwijgende consensus over het antwoord: wiskunde is natuurlijk belangrijk. Met dit antwoord wordt echter tegenwoordig geen genoegen meer genomen. Als de wiskundesectie niet kan aantonen dat de invulling van het vak wiskunde serieus bijdraagt aan het probleemoplossend of modellerend vermogen van leerlingen en/of een goede ondersteuning biedt bij de vakken waarin wiskunde wordt toegepast, dan worden tegenwoordig secties zomaar opgeheven of geminimaliseerd.
Op de conferentie werd in ieder geval duidelijk dat er wel een remedie is tegen deze trend; de wiskundesectie zal het voortouw moeten nemen in het gebruik van krachtige en geavanceerde wiskunde-gereedschappen als computeralgebra, modelleerprogramma's en spreadsheets.
In het forum aan het eind van de conferentie gaf Anne van Streun (RU Groningen) aan dat de essentiële vraag daarbij is: 'Welke wiskundige basiskennis moeten leerlingen/studenten eigenlijk hebben om verantwoord, kritisch en effectief met zulke hulpmiddelen om te gaan?'
Deze vraag is niet zo eenvoudig te beantwoorden. Het is overigens wel een vraag die in principe ook binnen enkele jaren binnen het voortgezet onderwijs beantwoord zal moeten worden.
Nu al wordt veel gediscussieerd over bijvoorbeeld de precieze verhouding tussen benodigde algebratechnieken in de Tweede Fase en het gebruik van de grafische rekenmachine.

VMBO

Binnen enkele maanden zullen scholen op grote schaal worden voorgelicht over de toekomstige plannen voor de inrichting van het VMBO. Een stelselwijziging in het voortgezet onderwijs waarbij de veranderingen in de Tweede Fase maar een peulenschil lijken.
De plaats van wiskunde in dit geheel staat gelukkig nog niet ter discussie. Wel wordt het zeer interessant welke rol wiskunde bijvoorbeeld zal gaan spelen in het leerwegondersteunend onderwijs en welke rol rekenen/wiskunde zal gaan spelen in het praktijkonderwijs. Gecijferdheid is natuurlijk een belangrijke factor in de zelfredzaamheid van de zwakkere leerlingen en hun kans op de arbeidsmarkt.

Tweede Fase

December jongstleden zijn er een aantal bijeenkomsten gehouden voor wiskundedocenten die in 1998 met de Tweede Fase zijn gestart: een zogenaamde vakmonitoring. In het volgende nummer zullen we u hierover nader berichten.
Over twee onderwerpen kunnen we nu al wel een tipje van de sluier oplichten.
Overladenheid zowel voor leerlingen als docenten is iets dat veel werd genoemd; dat zal niemand verbazen.
Een andere constatering was dat A-leerlingen in 4 vwo de nodige aandacht zullen moeten krijgen. Veelal hebben zij in 3 vwo voor een M-stroom (Cultuur & Maatschappij of Economie & Maatschappij) gekozen en dus voor wiskunde A.
In 4 vwo worden zij dan op veel scholen geconfronteerd met het feit dat ze in heterogene groepen, in dezelfde studielast, met dezelfde begeleiding en met dezelfde toetsing, een zelfde hoeveelheid leerstof moeten behappen als de B-leerlingen.
Dit leidt veelal tot zware onvoldoendes en afnemende motivatie. Aangepaste toetsing of begeleiding lijkt voor deze groep zeer van belang.

Kees Hoogland

Eén van de meest controversiële vernieuwingen in het denken over onderwijs is de aandacht voor praktische vaardigheden. Naast de traditionele toetsen, die altijd theoretisch van aard waren, moet de leerling nu ook getoetst worden op praktische bekwaamheden.

Praktische opdrachten voor wiskunde Een last of een uitdaging?

Cor Hofstra

Inleiding

Praktische opdrachten bij wiskunde, het lijkt wel een paradox. Voor het wiskundeonderwijs gold immers altijd het adagium: 'Iedere overeenkomst met de praktijk berust op louter toeval'! Bij wiskunde wilden we denken en niet doen naar het scheen. Praktijkvoorbeeldjes mochten niet te speels zijn, om de ernst van de situatie niet te onderschatten. En daar moet nu verandering in worden gebracht. Jammer? In mijn ogen niet. Praktische opdrachten openen voor veel leerlingen een prachtig onontgonnen leergebied, dat zij graag betreden en waar zij met plezier aan de slag gaan. Aan ons de taak de infrastructuur te verzorgen, zodat zij de weg kunnen vinden.

In het uiteindelijke examendossier zal bij wiskunde het cijfer voor de praktische opdrachten voorlopig voor 40% meetellen, maar over drie jaar zal de weging 60% zijn. Althans volgens de mij laatst bekende stand van zaken, want in de wandelgangen rommelt het nog steeds en de staatssecretaris Adelmund, die niet wist wat haar overkwam, neemt overhaast allerlei maatregelen om de te hoge studielast te beperken.[1])

Experiment examendossier

Enkele jaren geleden is het cluster exacte vakken van mijn school (de locatie Aldlân van de OSG Piter Jelles te Leeuwarden) begonnen met de voorbereidingen voor de vernieuwde Tweede Fase. We hebben samen met andere scholen, begeleid door het Cito, het experiment 'examendossier' uitgevoerd. Onderdeel van het examendossier is het maken van praktische opdrachten. Wij hebben de leerlingen van de voorexamenklassen praktische opdrachten laten maken, met een door ons geschatte studielast van ongeveer 10 à 12 uren. De leerlingen kregen een boekje met enigszins voorgeprogrammeerde opdrachten en een korte omschrijving wat er van hen verwacht werd. Men kon daaruit een opdracht kiezen, maar de leerling mocht ook zelf een voorstel doen. Om het voor de docent beheersbaar te houden werd er gekozen voor een vaste structuur.

Het verslag

Een verslag van een praktische opdracht moest bestaan uit een titel, een inhoudsopgave, een inleiding, een probleemstelling, een plan van aanpak, een onderzoek, conclusies en een bronnenlijst. Verder werd van de leerling een logboek gevraagd en moesten minstens twee overlegmomenten met de leraar worden afgevinkt. De leerling mocht gedeeltelijk tijdens begeleidingsuren aan het werkstuk werken. Voor al de hierboven opgesomde onderdelen konden de leerlingen punten verdienen. Het ontbreken van het logboek leverde minpunten op en het ontbreken van de overlegmomenten was niet toegestaan. Wij hoopten door het met eigen ogen waarnemen van de halfproducten fraude tegen te kunnen gaan. Een door de leerling zelf

bedacht probleem, of een zeer originele aanpak van een voorgekookt probleem kon extra punten opleveren.

Informatie vooraf

Voor de leerling is het belangrijk dat bovenstaande informatie vooraf beschikbaar is. In het instructieboekje is om die reden ook de normering, met de te verdienen punten opgenomen.
Leerlingen vonden het prettig een geraamte te hebben waarmee ze hun werkstuk konden omkleden. Overigens bleek ook hier het verschil tussen leerlingen die zeer dicht bij de voorgeschreven structuur bleven en leerlingen die het allemaal wat breder zagen en met eigen interpretaties op de proppen kwamen. Het zijn natuurlijk de wat onzekere leerlingen die zich graag aan de richtlijnen vastklampen terwijl de vrijbuiters hun eigen weg willen gaan. Geen van deze opvattingen hoeft een goed eindproduct in de weg te staan.

De probleemstelling

Van alle opgesomde onderdelen, bleek de probleemstelling het moeilijkst door de leerling te formuleren. De vraag was een zo kort mogelijke duidelijke en volledige probleemstelling in een kader op te schrijven. De leerling kan dan tijdens het maken van het werkstuk gemakkelijk teruggrijpen naar de oorspronkelijke vraag en afdwalen vermijden. Bovendien kan in de conclusie eenvoudig worden vastgesteld of er wel antwoord gegeven is op de oorspronkelijke vraag. Dit vonden veel leerlingen moeilijk, men gebruikte al snel te veel woorden. Het plan van aanpak werd meestal achteraf pas ingevuld zodat je zinnen kreeg als ‘ik ging naar de bibliotheek en toen ….’ Het plan van aanpak kan dan ook beter een onderdeel worden van het mondeling overleg. Het eigenlijke onderzoek werd echter door de meeste leerlingen met verve beschreven.

Havo A: Verpakkingsmateriaal

Eén van de opdrachten voor havo wiskunde A was het onderzoeken van een verband tussen de hoeveelheid gebruikt verpakkingsmateriaal en de inhoud van het pak, bij verschillende vormen van verpakking. Om het geheel beheersbaar te houden werd van hen gevraagd zich te houden aan vormen waarvoor in de wiskunde inhoudsformules bekend zijn, zoals balk, prisma, cilinder en (afgeknotte) piramide. Men moest bestaande verpakkingen onderzoeken. De leerlingen die deze opdracht kozen, waren er zonder uitzondering enthousiast mee bezig en tekenden allerlei uitslagen met berekeningen in hun werkstuk. De uiteindelijke vraag, een de meesten van ons hopelijk niet onbekende kwestie, was om een literblik te ontwerpen met zo weinig mogelijk materiaal. Deze opdracht werd door minder leerlingen tot een succesvol einde gebracht, waarbij men wel moet bedenken dat deze leerlingen niet kunnen differentiëren. Op vwo-niveau kan dat wel worden verwacht.

Havo A: distributiecentrum

Een andere opdracht was het vinden van een zo gunstig mogelijke uitvalsbasis voor een distributiecentrum in een vooraf gekozen regio. Deze opdracht was ook succesvol, omdat het de leerlingen duidelijk voor ogen stond wat er van hen werd verwacht. Evenals in de eerder genoemde opdracht, waren er door de docent beperkingen geformuleerd, om de leerlingen voor een chaos aan informatie te behoeden. Hier werd gevraagd drie provincies te kiezen en de vrachtauto’s ritten te laten uitvoeren naar plaatsen met 50 000 inwoners of meer en dan per 50 000 inwoners één rit per week. De angel zit hem in het feit dat de vestigingsplaats zelf niet 50 000 inwoners behoeft te hebben, al mag dat natuurlijk wel. Bovendien namen veel leerlingen de opdracht wel heel letterlijk, door naar een plaats met 99 784 inwoners één rit te laten uitvoeren, omdat de 2 keer 50 000 net niet was gehaald. Wiskundig gezien is dat natuurlijk ook niet fout, maar bij een praktische opdracht wordt, naar mijn mening, op zijn minst een kanttekening verwacht. Er waren zeker leerlingen met dat inzicht en dat moet zeker worden beloond.

Aandachtspunten

De genoemde opdrachten zijn misschien niet spectaculair of erg origineel, de leerlingen konden er goed mee overweg. Bij het zoeken naar praktische opdrachten moet ook de toepassing van de wiskunde in de praktijk, in voor de leerlingen op hun niveau oplosbare problemen, centraal staan. Wij staan als leraren dan ook voor de taak, samen met de leerlingen, herkenbare problemen te signaleren en die te vertalen naar goed te maken praktische opdrachten. Gelukkig is de eis een vaste studielast voor de praktische opdrachten te reserveren los gelaten en zijn de scholen min of meer vrij in de keuze van het aantal uren dat men wil besteden aan de praktische opdrachten. Dit betekent natuurlijk niet dat men er maar met de pet naar kan gooien. De praktische opdrachten tellen daarvoor te zwaar mee in het eindcijfer. Wel heeft men nu de mogelijkheid een praktische opdracht beter te laten aansluiten

op het behandelde onderwerp bijvoorbeeld door een onderwerp af te sluiten met het uitvoeren van een korte praktische opdracht.

Praktische opdrachten en de leerstof

Het onderwerp combinatoriek willen wij afsluiten met een opdracht de leerlingen een kentekenplaat te laten ontwerpen met daarop een herkenbare code, die ooit in alle landen van de Europese Gemeenschap gebruikt kan worden. Er moeten voldoende codes zijn voor de komende vijftien jaar en men moet jaar van uitgifte en land van inwoning kunnen herkennen. Bij deze opdracht gaat het er om dat de leerlingen het aantal benodigde kentekenplaten overtuigend kunnen schatten en dat ze duidelijk maken dat de door hen beoogde combinatie van tekens voldoende mogelijkheden biedt. Deze opdracht moet nog worden gedaan en heeft als bedoeling de leerlingen van de vierde klassen kennis te laten maken met de praktische opdracht. Wij willen deze opdracht gestuurd aan de leerlingen voorleggen, maar er moet goed aan worden gewerkt. Een te geringe prestatie zal ook met een onvoldoende worden gewaardeerd.

Het enige dat je weggooit is de verpakking

Praktische opdracht voor wiskunde A Havo-4

Melk wordt in de supermarkt al tientallen jaren verkocht in pakken. Het pak is niet de enige verpakking waarin melk in de loop der jaren is verkocht. Melk is verkocht in blikken, flessen, plastic zakken en plastic flessen. Veel van deze verpakkingen zijn eenmalig. De fabrikant koopt deze verpakking, doet er melk in en ziet er niets meer van terug. Het geld dat hij voor de verpakking heeft betaald, moet hij in de prijs doorberekenen. Gebruikt hij minder materiaal dan is het aandeel van de verpakkingskosten in de verkoopprijs natuurlijk ook lager. Dit gaat vooral aantikken bij verkoop van grote aantallen, zoals pakken melk. Een paar jaar geleden zijn de zuivelfabrieken met een nieuw type pak gekomen, het $1\frac{1}{2}$ literpak. Als het goed is, dan is de hoeveelheid verpakkingsmateriaal per liter melk lager.

Veel verpakkingen hebben een wiskundige vorm. Dat is gemakkelijk, omdat je van veel wiskundige vormen en lichamen formules weet, of kunt achterhalen, waarmee je de oppervlakte en de inhoud kunt berekenen. De inhoud is van belang om te weten wat er in past en de oppervlakte is een geschikte maat voor de hoeveelheid gebruikt materiaal.

Bekende wiskundige vormen zijn: Kubus, Balk, Prisma, Piramide, Cilinder, Kegel, Bol.

De opdracht:

1 Zoek een aantal verpakkingen met de vorm van bovenstaande lichamen. Je moet minstens 10 verpakkingen noemen, waarbij je minstens 3 van bovenstaande vormen moet opzoeken. Schrijf op wat voor een soort artikel het is. Teken de vorm na en schrijf op wat de inhoud en wat de oppervlakte is van die verpakking.

2 Bedenk een methode, waarmee je inhoud en oppervlakte kunt vergelijken. Met deze methode moet je kunnen aangeven of er relatief veel, of relatief weinig verpakkingsmateriaal gebruikt is.

3 Ontwerp een literblik met een zo klein mogelijke oppervlakte.

Lay-out en presentatie

Het mag niet zo zijn dat een fraaie lay-out van beslissende invloed is op het cijfer, al moet er wel worden opgemerkt dat ook de vaardigheid van de presentatie mag worden beoordeeld. Het is echter een misvatting te denken dat elke praktische opdracht waaraan hard is gewerkt een voldoende moet krijgen. Dat geldt wel voor het profielwerkstuk, omdat daar het proces veel beter in de gaten wordt gehouden. Bij de praktische opdracht gaat het zeker ook om het niveau. Daar moeten de nodige punten in de normering voor worden gereserveerd.

Soorten praktische opdrachten

Wiskunde is een vak dat door haar vele toepassingen bij uitstek geschikt is voor het bedenken van praktische opdrachten. Men kan denken aan optimaliseringsproblemen, logistieke problemen, ruimtelijke ordening, statistisch onderzoek, kansspelen, oriëntatie op zee of in het veld, ingewikkelde inhouds- en oppervlakteberekeningen, opsporen van oplossingen van klassieke problemen met behulp van de computer, computerprogramma's schrijven of andere ICT-

Getallen met een *naam*

Carmichaelgetallen

Pierre de Fermat bewees de volgende stelling:

Stelling 1 (Fermat)

Als p priem is dan geldt voor ieder natuurlijk getal a met ggd(a, n) = 1

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

De stelling zegt dat een priemgetal p deler is van $a^{p-1} - 1$ voor alle a die geen veelvoud zijn van p.

Bijvoorbeeld: $3 \mid 2^2 - 1$, $5 \mid 4^4 - 1$ en $7 \mid 3^6 - 1$.

Aangezien $7^{340} = (7^3)^{113}7 \equiv 2^{113}7 \equiv (2^{10})^{11}2^3 7 \equiv 8 \cdot 7 \equiv 56 \not\equiv 1 \pmod{341}$ volgt uit stelling 1 dat 341 niet priem is. Dat is misschien niet spectaculair, want $341 = 11 \cdot 31$, maar opmerkelijk is dat dit uit de stelling van Fermat volgt *zonder* dat we daarvoor de priemfactoren van 341 hoeven te kennen. Omdat modulair machtverheffen op een computer heel snel uitgevoerd kan worden, kun je dus ook voor grote waarden van p snel nagaan of

$$a^p \equiv 1 \pmod{p} \qquad (1)$$

Zodra je ook maar één a vindt met $\text{ggd}(a, p) = 1$ waarvoor (1) niet geldt, heb je bewezen dat p geen priemgetal is.

Stelling 1 mag (helaas?) niet omgekeerd worden: uit de geldigheid van (1) voor zekere a en p volgt niet dat p priem is. Er zijn zelfs samengestelde getallen p waarvoor (1) geldt voor *alle a* met $\text{ggd}(a, p) = 1$. Zulke getallen heten Carmichaelgetallen, genoemd naar R.D. Carmichael (1879-1967).

Een Carmichaelgetal is een samengesteld getal n waarvoor $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ voor alle a met $\text{ggd}(a, n) = 1$.

De kleinste Carmichaelgetallen zijn:

$561 = 3 \times 11 \times 17$	$2821 = 7 \times 13 \times 31$
$1105 = 5 \times 13 \times 17$	$6601 = 7 \times 23 \times 41$
$1729 = 7 \times 13 \times 19$	$8911 = 7 \times 19 \times 67$
$2465 = 5 \times 17 \times 29$	$10585 = 5 \times 29 \times 73$

Met de volgende stelling kunnen we eenvoudig nagaan dat de bovenstaande getallen Carmichaelgetallen zijn.

Stelling 2

Een getal $(n > 2)$ *is dan en slechts dan een Carmichaelgetal als het te schrijven is als* $n = p_1 p_2 p_3 \ldots p_k$ *waarbij de* p_i*'s verschillende priemgetallen zijn waarvoor* $(p_i - 1) \mid (n - 1)$.

Voor het getal $6601 = 7 \cdot 23 \cdot 41$ geldt $6 \mid 6600$, $22 \mid 6600$ en $40 \mid 6600$. Waaruit blijkt dat 6601 een Carmichaelgetal is.
Uit de stelling volgt dat ieder Carmichaelgetal oneven is. Bovendien gaan we eenvoudig na dat ieder Carmichaelgetal minstens drie verschillende priemfactoren heeft.
Stel een Carmichaelgetal bestaat uit slechts twee priemfactoren p en q met $p > q$.
Dan

$$n - 1 = pq - 1 = (p - 1)q + (q - 1) \equiv q - 1 \not\equiv 0 \pmod{p - 1}$$

waaruit volgt dat $p - 1$ geen deler is van $n - 1$.
Het kleinste Carmichaelgetal met meer dan drie priemfactoren is $41041 = 7 \times 11 \times 13 \times 41$.
Pas in 1992 is door W.R. Alford, A. Granville en C. Pomerance bewezen dat er oneindig veel Carmichaelgetallen zijn.

Rob Bosch

Literatuur

P. Ribenboim **The Little Book of Big Primes**
Springer 1991
K.H. Rosen **Elementary Number Theory and its Applications**
Addison-Wesley 1985
C. Pomerance **Carmichael numbers**
Nieuw Archief voor Wiskunde, Deel 11, no 3, november 1993
W. Bosma **Priem of niet**
Pythagoras 37-3, februari 1998

toepassingen demonstreren, demografie, getijdenbewegingen, grafieken classificeren en ga zo maar door. Daarbij moet wel opgemerkt worden dat de informatie voor de leerlingen hetzij voorhanden moet zijn en anders gemakkelijk te vinden. Het gaat uiteindelijk om het wiskundige werk dat er verricht wordt, het verzamelen van informatie hoort daar weliswaar ook bij, maar moet op het niveau van de leerlingen niet te veel tijd kosten. Een andere kanttekening is die over het statistisch onderzoek. Leerlingen de straat opsturen, kan tot gevolg hebben dat de omgeving van de school geteisterd wordt door allerlei leerlingen die elk hun eigen enquête hebben bedacht. Dat verveelt snel. Sturing is hier zeker een vereiste.

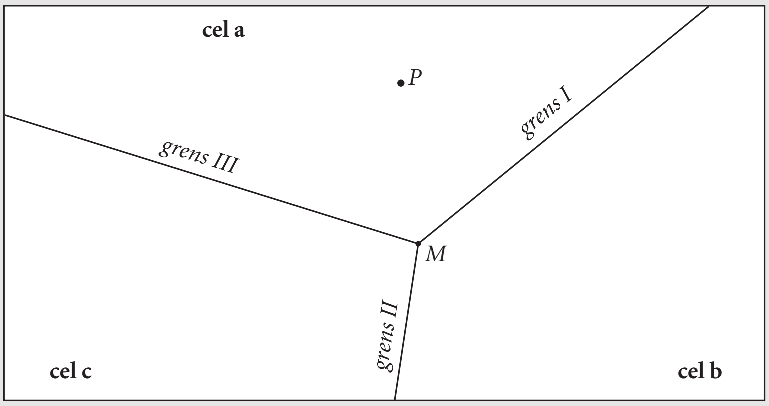
Wiskunde A en wiskunde B

Voor wiskunde A zijn er, gezien de aard van dit vak, voldoende onderwerpen te vinden voor praktische opdrachten, hierboven heb ik al een paar voorzetten gegeven. Voor wiskunde B zal wat meer moeten worden gezocht, al zal ook hier menig docent snel op ideeën komen. Ooit heb ik eens een werkstuk gezien van een docent in opleiding die bestudeerde onder welke voorwaarden een auto met aanhanger een rotonde kan passeren. Zeker met het oog op de huidige minirotondes en de maxivrachtwagens een probleem waar wat mee te doen is. Een bekend, maar lastig, probleem is dat van het stapelen van bollen. In de Profi-katernen van het Freudenthal instituut worden ook aardige onderzoeken gevraagd, die aansluiten bij de leerstof.
Verder valt te denken aan het maken van een demonstratie voor de medeleerlingen van het programma Cabri. Of het nader ingaan in een voordracht op de eigenschappen van de koordenvierhoek, of andere interessante vlakke meetkunde die het inzicht kan verdiepen. Anne van Streun heeft ooit eens een opdracht gepresenteerd aan de hand van een Amerikaans artikel, waarin sportprestaties werden gecorrigeerd aan de hand van, als ik het me goed herinner, inhoud en grootte van de sporter. Wellicht is er een wiskundige methode om de prestaties van sporters met een handicap met elkaar te vergelijken.

Aan de leerling voorleggen

Het bij de leerlingen presenteren van praktische opdrachten vereist de meeste zorg. Allereerst zal de sectie een jaarplanning moeten maken, waarin de nodige ruimte voor praktische opdrachten wordt gecreëerd. Daarnaast zal er beslist aandacht moeten zijn voor de formulering van de opdracht. De leerlingen willen best een opdracht uitvoeren, mits zij weten wat er van hen wordt verwacht. Dat betekent niet dat de hele opdracht minutieus moet wor-

16
Hieronder zijn de grenzen van een Voronoi-diagram met drie centra gegeven. In cel *a* ligt punt *P*.
Werk bij deze opgave zo nauwkeurig mogelijk, anders kom je in moeilijkheden. Je kunt het spiegelen nauwkeurig uitvoeren met de geodriehoek. Zie bladzijde 4.



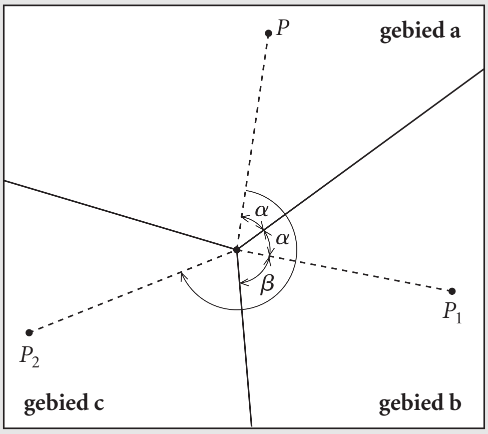
a *P is zeker niet het bij cel a horende centrum.*
Dat kun je nagaan door *P* te spiegelen in grens I, noem het spiegelbeeld P_1.
Spiegel daarna P_1 in grens II. Noem het spiegelbeeld P_2.
Spiegel tenslotte P_2 in grens III. Noem het spiegelbeeld *Q*.
Waarom kan *P* niet het centrum van cel *a* zijn?
b Teken het midden van lijnstuk *PQ* en noem het *R*. Spiegel ook *R* achtereenvolgens in de drie grenzen, zo ontstaat tenslotte punt *S*. Wat merk je nu aan dit uiteindelijke punt *S*?
c Het gevonden punt *R* (of *S*) kán het centrum van cel *a* zijn, maar hoeft dat niet persé te zijn. Een andere mogelijkheid is bijvoorbeeld een punt dat midden tussen *R* en het aangegeven drielandenpunt *M* ligt. Ga dat na door herhaald spiegelen.

Reconstructieprobleem
Het eindresultaat van opgave 16 is verrassend. Op de aangegeven manier kun je blijkbaar zonder dat je ook maar één van de centra wist, toch mogelijke centra terugvinden.

De vraag is natuurlijk: waarom werkt dit altijd goed?

Onderzoeksopdracht A: Centra terugvinden

Deze opdracht sluit aan bij opgave 16.
Zorg eerst dat je er zeker van bent wat daar de manier was om bij een Voronoi-diagram van drie cellen met een drielandenpunt een mogelijke ligging voor de centra terug te vinden.



Opgave EEN
Vind en beschrijf een redenering, waaruit blijkt dat de manier van opgave 16 altijd werkt.

Enkele tips:

a In nevenstaande figuur zijn P_1 en P_2 al aangegeven. Het volgende gespiegelde punt zou Q zijn, maar noem dat punt nu P_3 en spiegel nog drie keer door. Je ontdekt iets over P_6.
b **Als** je zeker zou zijn dat het voorgaande altijd klopt, **dan** kun je concluderen dat het midden R van PP_3 na *drie* keer spiegelen op zichzelf terecht komt.
Zoek uit waarom dat zo is.
c Maar waaróm is P_6 gelijk aan P?
In de figuur zijn enkele hoeken aangegeven. Je kunt het spiegelen ook opvatten als draai van de staaf MP om het draaipunt M. Vergelijk de draaihoek van MP naar MP_2 met de hoek van cel *b*.

den opgetekend. Het betekent wel dat er een aanzet wordt gegeven voor het onderzoek en dat er de nodige beperkingen worden geformuleerd. Wanneer de docent de indruk heeft dat de leerling moeite zal hebben met het vergaren van de informatie, is een hint natuurlijk nooit weg.

Ten slotte

In dit artikel heb ik niet gestreefd naar volledigheid. Het gebied van de praktische opdrachten is voor wat betreft de wiskunde nog een onontgonnen gebied. Over een aantal jaren kijken we wellicht meewarig terug op deze begintijd. De uitdaging ligt er echter. Er zijn vast suggesties genoeg voor praktische opdrachten, daar twijfel ik niet aan. Ten slotte is de betrokkenheid onder onze vakgenoten altijd zeer groot en is het zelfvertrouwen meer dan voldoende. Op de jaarvergadering van de vereniging werd enthousiast gezocht naar de vraag of men tetraëders met een van de ribben zo tegen elkaar kan plaatsen dat ze de ruimte rondom de gemeenschappelijke ribbe precies kunnen opvullen. Vaak heb ik in het verleden tetraëdervormige jaffa-drinkjes uit hun prismavormige verpakking gehaald en er weer in gedaan en het paste altijd precies. Maar ja, die pakjes zijn flexibel.

Noot

1 De weging van 40% is inmiddels voor minstens vijf jaar vastgesteld. Zie Uitleg 30b, 16 december 1998. *redactie*

Een nimspel (deel II)

Saskia Oortwijn, Leon van den Broek

Wat vooraf ging

In deel I van dit artikel, dat in het vorige nummer van Euclides stond, werd het nimspel uitgelegd en een variant gekozen. De zoektocht naar winnende posities eindigde met een lijst van de eerste 255 winnende posities (Appendix 1).

In het nu volgende deel gaan we de verzameling van alle winnende posities beschrijven, zodat we aan een positie *direct* kunnen zien of hij winnend is of niet.

De collectie winners W

In de vorige paragraaf (deel I) hebben we de verzameling winners W geconstrueerd. Dat hebben we zo gedaan dat aan de volgende drie regels is voldaan.

1 (0, 0) is een winner.
2 Als (x,y) een winner is en $(x,y) \to (u, v)$ is een zet, dan is (u, v) geen winner.
3 Als (u, v) geen winner is, dan is er een zet $(u, v) \to (x, y)$, zodat (x, y) wel een winner is.

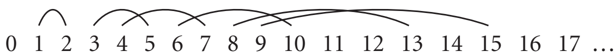
Deze drie regels hebben de constructie van de verzameling winners volledig gestuurd: ze zijn bepalend voor de verzameling winners.

Voor de verzameling W gelden de volgende drie beweringen.

- Voor elk aantal a is er precies één winner (a, y).
- Voor elk aantal b is er precies één winner (x, b).
- Voor elk natuurlijk getal c is er precies één winner (x, y) zo dat $x - y = c$. Ook is er precies één winner (x, y) zodat $y - x = c$.

Deze beweringen betekenen in het rooster dat op achtereenvolgens elke verticale baan, elke horizontale baan en elke diagonale baan precies één winner ligt.
Dat er geen twee winners liggen op één baan, is een rechtstreeks gevolg van regel 2 van de collectie winners. Anders zou je vanuit een winner in één zet een andere winner kunnen bereiken.
Dat er op elke horizontale en op elke verticale baan inderdaad een winner ligt, komt doordat we in de constructie van W geen enkele rij of kolom hebben overgeslagen. Op elke diagonale baan ligt een winner, omdat bij elke stap in de constructie het verschil van de coördinaten 1 groter wordt; dus elk verschil c komt voor. In figuur 8 (in deel I) kun je mooi zien dat de drie regels voor de collectie winners W gelden.

De vraag is nu, hoe de verzameling winners direct beschreven kan worden. We kijken naar de winners (x, y) waarbij $y > x$. We nummeren de posities: (x_n, y_n); dus $(x_1, y_1) = (1, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, 5)$, enzovoort. In deel I hebben we gezien hoe de rijen x_n en y_n zijn opgebouwd. Stel dat je tot en met het paar (x_{n-1}, y_{n-1}) bent gevorderd. Dan
1) wordt het volgende getal x_n het kleinste getal dat je tot dan toe niet in de twee rijen gehad hebt, en
2) wordt y_n het getal $x_n + n$.
De gepaarde getallen zijn met een boog verbonden:



In [4] wordt beweerd dat $x_n = [n\tau]$ en $y_n = [n\tau^2]$.

Hierbij is τ het getal $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ en is [ ] de entierfunctie.

Het bewijs van de bewering wordt daar als een opgave aan de lezer overgelaten. Verderop leveren wij een bewijs.
We waren verrast dat een irrationaal getal als τ bij dit discrete nimspel opduikt. Maar misschien is het ook niet zo gek als je onder (x_n, y_n) de paren (3, 5), (8, 13), (21, 34), (55, 89) aantreft, bekend uit de rij van Fibonacci.
Alvorens een bewijs te zoeken, hebben we meer aanwijzingen proberen te vinden voor de juistheid van de bewering. Allereerst blijkt de bewering juist te zijn voor de eerste 255 winnende posities uit **appendix 1**. Daarna zijn we eens gaan kijken naar de groeisnelheid van de rijen x_n en y_n. Hoe snel neemt de eerste coördinaat x_n toe? Bekijk maar eens een paar voorbeelden: $x_{10} = 16$, $x_{50} = 80$, $x_{100} = 161$, $x_{150} = 242$, $x_{200} = 323$; x_n lijkt ruim 1,6 keer zo snel te groeien als n. In **appendix 2** bewijzen we dat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = \tau$. Omdat $y_n = x_n + n$, volgt dat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{n} = \tau + 1$. Bijgevolg is $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = 1 + \dfrac{1}{\tau}$ $(= \tau)$.

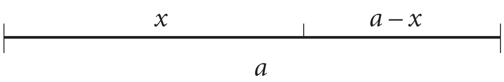
Merk op dat τ een oplossing is van de vierkantsvergelijking $x^2 - x - 1 = 0$. Daaruit kun je zonder veel moeite afleiden dat

$$\tau^2 = \tau + 1,\quad \frac{1}{\tau} = \tau - 1 \quad \text{en} \quad \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} = 1.$$

Voordat we aan het bewijs beginnen, willen we eerst nog wat kwijt over τ en entier.

Intermezzo over het getal τ

τ is vooral bekend als de "gulden verhouding" of de "gulden snede". De gulden snede is een klassieker in de meetkunde. De oude Grieken stelden het volgende probleem: *verdeel een lijnstuk (zeg van lengte a) in twee stukken (zeg van lengte x en a-x), zo dat het grote stuk zich verhoudt tot het kleine stuk als het hele lijnstuk zich verhoudt tot het grote.*



De Grieken hadden een passer-en-liniaal-constructie om die verdeling (de gulden snede) aan te brengen. De gulden snede speelt onder andere een rol in de constructie van een regelmatige vijfhoek met gegeven zijde. Sinds de Renaissance was de verdeling volgens de gulden snede populair in de kunst: bij schilders, beeldhouwers, architecten. Ook in de natuur is de gulden snede veelvuldig waar te nemen, bijvoorbeeld in schelpen van zeedieren, schubben van de ananas (in verband met de rij van Fibonacci). En in het occulte worden aan de gulden snede magische, bovennatuurlijke krachten toegedicht. Een fraaie verhandeling over de gulden snede vind je in [5].

In moderne algebrataal betekent de gulden snede dat

$\dfrac{x}{a - x} = \dfrac{a}{x}$. En deze verhouding $\dfrac{a}{x}$ is het getal τ, de gulden verhouding. We vinden τ door de vierkantsvergelijking $x^2 = x + 1$ op te lossen: $\tau = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Omdat $\sqrt{5}$ irrationaal is, is τ dat ook.
Een rekenmachientje geeft $\tau \approx 1{,}62$, $\tau^2 \approx 2{,}62$, $\dfrac{1}{\tau} \approx 0{,}62$ en $\dfrac{1}{\tau^2} \approx 0{,}38$.

Intermezzo over entier

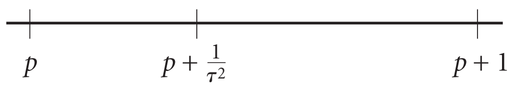
Een reëel getal x kun je splitsen in zijn gehele deel (de cijfers voor de komma) en zijn breukdeel (de cijfers achter de komma: de rest). Het gehele deel van x noemt men ook wel de entier van x, en men noteert dat met $[x]$. Duidelijk is dat $[x] = x$ alleen geldt als x zelf geheel is. Algemeen geldt dat $x - 1 < [x] \leq x$ en dat de rest $x - [x]$ ligt tussen 0 en 1.
Omdat $\tau^2 - \tau = 1$, geldt $n\tau^2 - n\tau = n$ voor elk natuurlijk getal n, en dat betekent dat $n\tau$ en $n\tau^2$ precies dezelfde cijfers achter de komma hebben (anders kan er uit het verschil geen geheel getal komen). Dus geldt ook $[n\tau^2] - [n\tau] = n$ voor elk natuurlijk getal n.
We bekijken de getallen $[n\tau]$, waarbij n de positieve gehele getallen doorloopt. We krijgen: 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, … en dat is precies de rij x_n. $[n\tau^2]$ levert precies alle andere positieve gehele getallen: 2, 5, 7, 10, 13, 15, 17, … en dat is de rij y_n. De bewijzen voor deze beweringen volgen.

Over de getallen $[n\tau]$ en $[n\tau^2]$

Omdat $\tau > 1$ is het duidelijk dat $[n\tau]$ en $[m\tau]$ slechts gelijk kunnen zijn als $m = n$. Net zo voor $[n\tau^2]$ en $[m\tau_2]$.
We willen bewijzen dat elk positief natuurlijk getal te schrijven is als $[n\tau]$ voor zekere n of als $[n\tau^2]$ voor zekere n. Bovendien bewijzen we dat een natuurlijk getal niet op beide wijzen te schrijven is. Met andere woorden: de verzamelingen $\{[n\tau] \mid n = 1, 2, 3, 4, \dots\}$ en $\{[n\tau^2] \mid n = 1, 2, 3, 4, \dots\}$ zijn elkaars complement in de positieve natuurlijke getallen. Het bewijs hiervan vereist zorgvuldig manipuleren.

$\left[\dfrac{k}{\tau}\right]$ noemen we p. $\left[\dfrac{k}{\tau}\right]$ ligt in het interval $[p, p + 1]$.
$p + \dfrac{1}{\tau^2}$ ligt ook in dat interval.

Het getal $\dfrac{k}{\tau}$ ligt òf links òf rechts van $p + \dfrac{1}{\tau^2}$.



Merk op dat $\dfrac{k}{\tau} \neq p + \dfrac{1}{\tau^2}$, want dan zou

$\dfrac{k}{\tau} = p + 1 - \dfrac{1}{\tau}$ (gebruik $\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{1}{\tau^2} = 1$),

dus $\dfrac{k + 1}{\tau} = p + 1$, ofwel: $\tau = \dfrac{k + 1}{p + 1}$

en dat betekent dat τ een rationaal getal zou zijn.

Als $\left[\dfrac{k}{\tau}\right]$ links ligt van $p + \dfrac{1}{\tau^2}$, dan geldt: $p < \dfrac{k}{\tau} < p + \dfrac{1}{\tau^2}$
We trekken deze ongelijkheid van k af.

Omdat $k - \dfrac{k}{\tau} = \dfrac{k}{\tau^2}$, krijgen we:

$k - p - \dfrac{1}{\tau^2} < \dfrac{k}{\tau^2} < k - p$. Vervolgens vermenigvuldigen we met τ^2. Dat geeft: $(k - p)\tau^2 - 1 < k < (k - p)\tau^2$. Dus $k = [(k - p)\tau^2]$ en dat is van de vorm $[n\tau^2]$.

Als $[\dfrac{k}{\tau}]$ rechts ligt van $p + \dfrac{1}{\tau^2}$, dan geldt:

$p - \dfrac{1}{\tau^2} < \dfrac{k}{\tau} < p + 1$.

We vermenigvuldigen deze ongelijkheid met τ.

Dat geeft: $p\tau + \dfrac{1}{\tau} < k < (p + 1)\tau$, ofwel

(gebruik $\dfrac{1}{\tau} = \tau - 1$): $(p + 1)\,\tau - 1 < k < (p + 1)\tau$.

Dus $k = [(p + 1)\tau]$ en dat is van de vorm $[n\tau]$.

We kunnen deze berekeningen ook omkeren:
als $k = [n\tau]$ dan ligt (met de notatie van hiervoor)

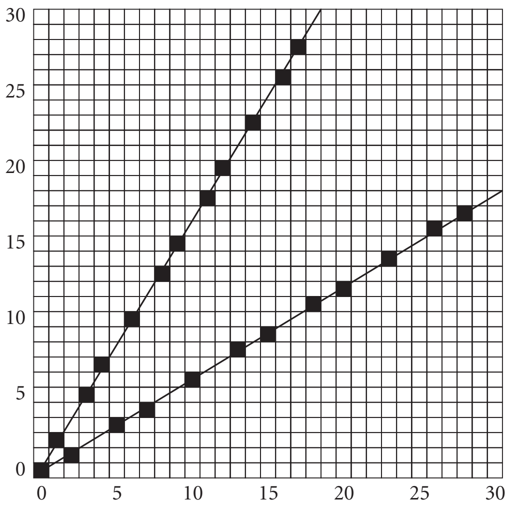
$\dfrac{k}{\tau}$ rechts van $p + \dfrac{1}{\tau^2}$; als $k = [n\tau^2]$ dan ligt $\dfrac{k}{\tau}$

links van $p + \dfrac{1}{\tau^2}$. Hieraan zie je dat een getal k nooit

tegelijk van de vorm $[n\tau]$ en van de vorm $[n\tau^2]$ kan zijn.

De collectie V = { (0, 0), ($[n\tau]$, $[n\tau^2]$), ($[n\tau^2]$, $[n\tau]$) }

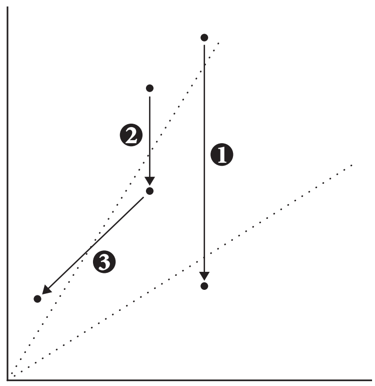
We bekijken de collectie V van alle posities van de vorm $([n\tau], [n\tau^2])$ en $([n\tau^2], [n\tau])$, waarbij n de positieve gehele getallen doorloopt, tezamen met de positie (0, 0). In de figuur hieronder zijn de eerste 23 posities uit V aangegeven. Ons uiteindelijke doel is te bewijzen dat V precies de collectie winners W is. Daarvoor moet eerst nog wat werk worden verzet.



We gaan bewijzen dat V aan de volgende drie regels voldoet.

1 (0, 0) zit in V.
2 Als (x, y) in V zit en $(x, y) \rightarrow (u, v)$ is een zet, dan zit (u, v) niet in V.
3 Als (u, v) niet in V zit, dan is er een zet $(u, v) \rightarrow (x, y)$, zodat (x, y) wel in V zit.

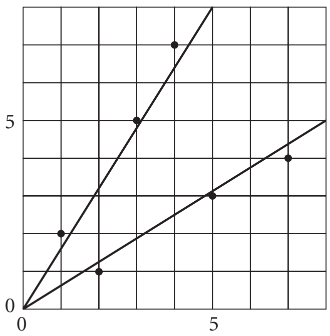
Dat 1. juist is, is duidelijk.
Bewijs van 2:
Als $(x, y) = (0, 0)$, dan is er geen zet meer mogelijk.
Uit de vorige paragraaf volgt direct dat je vanuit een positie $([n\tau], [n\tau^2])$ of $([n\tau^2], [n\tau])$ niet een ander element van V kunt bereiken door uit een van de twee rijtjes lucifers weg te nemen. Kan dat wel door uit beide rijtjes een zelfde aantal (zeg p) weg te nemen? Dan moet $([n\tau] - p, [n\tau^2] - p) = ([m\tau], [m\tau^2])$ voor zekere $m < n$. Maar dan moet $[m\tau^2] - [m\tau] = [n\tau^2] - [n\tau]$ en dit is identiek aan $m = n$ (zie intermezzo over entier). Tegenspraak. Vanuit een positie in V kun je dus niet in één zet een positie in V bereiken.
Bewijs van 3:
Stel $v > u$. Elk positief geheel getal is òf van de vorm $[n\tau]$, òf van de vorm $[n\tau^2]$. Dit passen we toe op u. We onderscheiden drie gevallen (zie de volgende figuur).



- $u = [n\tau^2]$. Dan is de V-positie $([n\tau^2], [n\tau])$ in één zet bereikbaar: zet 1.
- $u = [n\tau]$ en $v > [n\tau^2]$. Dan is de V-positie $([n\tau], [n\tau^2])$ in één zet bereikbaar: zet 2.
- $u = [n\tau]$ en $u < v < [n\tau^2]$. Dan is de V-positie $([(v - u)\tau], [(v - u)\tau^2])$ in één zet bereikbaar: zet 3.

Dit kan omdat $[(v - u)\tau^2] - [(v - u)\tau] = v - u$ (volgens intermezzo over entier) en $[(v - u)\tau] < u$.
Dit laatste bewijzen we nog even.
Omdat $v < [n\tau^2]$ is $v \leq [n\tau^2] - 1$, dus
$0 \leq v - u \leq [n\tau^2] - 1 - [n\tau] = n - 1$. Hieruit volgt:
$0 \leq [(v - u)\tau] \leq [(n - 1)\tau] < [n\tau] = u$.
Het geval $v < u$ gaat analoog.
Vanuit (u, v) is dus altijd een V-positie bereikbaar.

Vaak zijn er meerdere zetten mogelijk om van een positie buiten V naar een positie in V te komen, maar niet altijd.
Men kan ook nog bewijzen dat $([n\tau], [n\tau^2])$ laagst gelegen roosterpunten boven de lijn $y = \tau x$ zijn. Dat wil zeggen dat er geen roosterpunten liggen tussen $([n\tau], [n\tau^2])$ en $([n\tau], \tau[n\tau])$. Evenzo zijn $([n\tau^2],[n\tau])$ meest links gelegen roosterpunten rechts van de lijn $y = \tau x$. Zie de figuur hieronder.



V = W

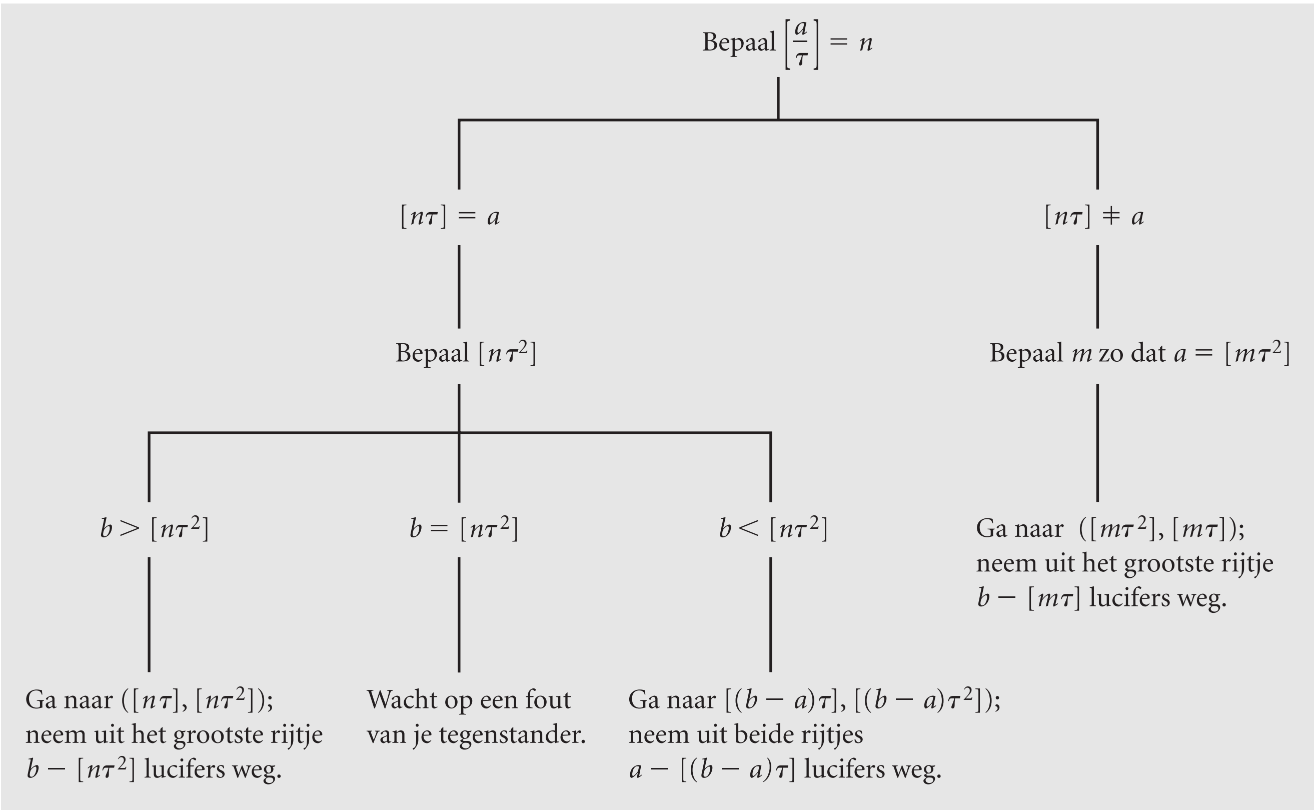
We hebben nu twee verzamelingen die voldoen aan de volgende drie regels.
1 (0, 0) zit erin.
2 Als je erin zit en je doet een zet, dan ben je eruit.
3 Als je eruit bent, dan kun je er in één zet in komen.
De ene verzameling is V, de andere is de verzameling winners W.

Stel nu dat V niet dezelfde verzameling is als W. Er is dan een positie (a, b) die wel V zit maar niet in W, of omgekeerd. Wij gaan van het eerste uit. Speler A speelt volgens verzameling V en tegenstander B volgens W. B is aan zet en de positie is (a, b). Omdat (a, b) niet in W zit, kan hij in één zet W bereiken en zal hij volgens zijn speelwijze (0, 0) bereiken en dus winnen. Maar A gaf een positie af die in V zat. Dus zal hij volgens zijn speelwijze (0, 0) bereiken en winnen. Tegenspraak.
Conclusie $V = W$.

Hiermee hebben we een directe beschrijving gevonden van de winners: de winners zijn de posities van de vorm (0, 0), $([n\tau], [n\tau^2])$ en $([n\tau^2], [n\tau])$, met n positief geheel.

De winnende speelwijze

Tot slot het schema van de speelwijze die tot winst leidt, tenminste als je aan je tegenstander in de loop van het spel een winnende positie kunt afgeven. En als je tegenstander het spel niet kent, krijg je daar tijdens een spelletje vast wel een keer de gelegenheid voor, zeker als je met grote aantallen lucifers in beide rijtjes begint.
Jij bent aan de beurt. Het rijtje met de minste lucifers bevat er a, het andere rijtje bevat er b.



Appendix 2: het bewijs van $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{n} = \tau$

De rij eerste coördinaten is: $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 6, x_5 = 8, x_6 = 9, x_7 = 11, x_8 = 12, \ldots$. De rij tweede coördinaten is: $y_1 = 2, y_2 = 5, y_3 = 7, y_4 = 10, y_5 = 13, y_6 = 15, y_7 = 18, y_8 = 20, \ldots$. Steeds geldt: $y_n = x_n + n$. Elke volgende x_n is het kleinste getal dat je nog niet als eerste of tweede coördinaat gehad hebt.

Omdat Δx_n hoogstens 2 is, bestaat $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{n}$ (het bewijs hiervan is elementair). Deze limiet noemen we L.
We bekijken de eerste y_n positieve gehele getallen. Daar zitten n getallen van de vorm y_i bij, en dus zitten er $y_n - n = x_n$ getallen van de vorm x_i bij. Hieruit volgt dat $x_{x_n} = y_n - 1 = x_n + n - 1$.
We bekijken een deelrij van de rij $\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots$,

namelijk de rij $\frac{x_{x_1}}{x_1}, \frac{x_{x_2}}{x_2}, \frac{x_{x_3}}{x_3}, \ldots$

(dat is dus de rij $\frac{x_1}{1}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \frac{x_6}{6}, \ldots$).

Er geldt: $L = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_{x_n}}{x_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n + n - 1}{x_n} =$

$\lim\limits_{n \to \infty} 1 + \frac{n}{x_n} - \frac{1}{x_n} = 1 + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{x_n} - \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} =$

$1 + \frac{1}{L} - 0$.

Dus $L = 1 + \frac{1}{L}$, ofwel $L^2 - L - 1 = 0$.

De positieve oplossing van deze vierkantsvergelijking moeten we hebben: dat is τ.

Literatuur

1 *F. Schuh*, **Spelen met Getallen**, Thieme, Zutphen, 1951
Hoofdstuk 6 van dit boek gaat over het nimspel. Hier wordt ook een winnende speelwijze gegeven voor de eerste variant van het nimspel, die aan het begin dit artikel genoemd wordt.

2 *F. van Grunfeld e.a.*, **Spelletjes uit de hele Wereld**, Kosmos, Amsterdam, 1975
Bladzijde 286 en 287 gaan over luciferspelletjes, ondermeer het nimspel. Verder staat dit boek vol met spelletjes en puzzels om zelf te maken.

3 *A. van Gaalen, I. Mahieu*, **Turven en zestig andere rekenspelletjes**, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1991
In dit boekje worden meerdere varianten van het nimspel besproken. Verder staat het vol met (hoe kan het ook anders) spelletjes die iets met rekenen of getallen te maken hebben.

4 *C. Berge*, **Graphs et Hypergraphs**, Paris, 1985
Onze variant wordt kort besproken op bladzijde 324.

5 *D. Pedoe*, **Perspectieven doorzien**, Aramith Uitgevers, Amsterdam, 1988
In dit boek wordt de gulden snede uitgebreid besproken. Ook wordt de gulden snede vanuit historisch en esthetisch oogpunt belicht. Bovendien wordt het verband met de rij van Fibonacci gelegd.

Wat en waar is wiskunde III

Magda Bruin

Een nieuwe serie bestemd voor de derde klas havo/vwo en het derde en vierde leerjaar vbo/mavo. Naast een introductie op begrippen komen ook de wiskundige onderwerpen in samenhang met elkaar aan de orde.

Programma 1

Thema 1: *Groei*
In de natuur groeien bloemen en planten. Maar hoe meet je de groei van gras: sprietlengte, dikte grasmat? Bij de bestrijding van kakkerlakken is het exponentiële groeimodel te gebruiken.

Thema 2: *Periodieke veranderingen*
Het dag-en-nacht ritme bepaalt ons leven van slapen en werken. Door het getij is de waterhoogte aan de kust een periodieke verandering van eb naar vloed. Ongekende krachten ontstaan door periodieke bewegingen bij elkaar op te tellen.

Programma 2

Thema 3: *Kijken en tekenen*
In de zestiende eeuw werd de wiskunde ontdekt om schilderijen te maken die echt lijken. Lichtbundels en zonnestralen tekenen schaduwen van de artiest op het toneel en van de parasol in het zand.

Thema 4: *Tekening lezen*
Bij de zware tocht naar de top van de Mount Everest gebruiken bergbeklimmers kaarten met hoogtelijnen. In de oceaan is de warme golfstroom ‘el niño’ met dezelfde hoogtelijnen te vinden.



Programma 3

Thema 5: *Grafen en diagrammen*
Uit de bevolkingspiramiden van de afgelopen vijftig jaar is de vergrijzing af te lezen. In de vorige eeuw deelde een Engelsman de inwoners van Londen al in welstandsklassen in. En bloedverwantschap is te zien in een boomdiagram.

Thema 6: *Formules en grafieken*
Pas in de achttiende eeuw werd voor het eerst een woordformule gebruikt. Vul temperatuur, luchtvochtigheid en windcirculatie in een formule in en je weet of er een tornado op komst is.

Programma 4

Thema 7: *Hellingen*
De nieuwe brug over de Lek is zo aangelegd dat schepen er onder door varen en automobilisten een goed zicht hebben. De zweefvlieger gebruikt het glijgetal om uit te rekenen of hij de landingsbaan haalt.

Thema 8: *Rekenen in de ruimte*
De artikelen in de supermarkt zijn gebaseerd op eenvoudige ruimtelijke figuren als cilinder en balk. Reken uit hoeveel zand er nog op voorraad is door de hoogte van de berg te schatten.

Nadere informatie

Met ingang van 1 april 1999 is ons adres op Internet: *www.teleacnot.nl*
Als begeleidend materiaal is er een handleiding met kopieerbare leerlingenwerkbladen.
De handleiding (28 pagina’s) bevat per thema twee werkbladen met opdrachten op vbo/mavo- en havo/vwo- niveau. Elke opdracht gaat uit van een situatie uit het programma. Antwoorden zijn achterin opgenomen zodat leerlingen zelfstandig aan het werk kunnen. Het programma bekijken, discussie in de groep en het maken van de opdrachten neemt ongeveer een lesuur in beslag.
De prijs bedraagt ƒ 22,50 per stuk.

Tijdens kantooruren te bestellen bij Teleac/NOT afdeling klantenservice, telefoon 0900-1344 (44 ct./min) of (035) 629 31 40. Faxen kan ook. Het faxnummer is (035) 629 31 99.

Uitzenddata

havo/vwo klas 3, vbo/mavo klas 4

Uitzenddata 1999

1	woensdag	3 maart	9.30 uur
2	woensdag	10 maart	9.30 uur
3	woensdag	17 maart	9.30 uur
4	woensdag	24 maart	9.30 uur

Attentie! De programma’s worden achter elkaar uitgezonden op donderdag 25 maart om 10.30 uur. Duur: 80 minuten.

Internet-site voor leerlingen met vragen die bij de programma’s horen.
Zoek de antwoorden op Internet:

- Hoeveel zijn mannen groter dan vrouwen?
- Hoe hoog komt het water aan de Nederlandse kust?
- Over plattegronden. Een rondleiding door een leuk gebouw vanuit je luie stoel…
- Formule. Hoe lang mag je in de zon?
- Sluitstuk. Lees het aantal bezoeken aan de website af uit grafieken.

Wat gebeurt er als een docent van een MBO-school ruilt met een docent uit de Basiseducatie? Twee rekendocenten hebben dit uitgeprobeerd en er een inspirerende videoband van gemaakt: 'Over het spoor'

Een rekenles ruilen met een collega

Rianne Reichardt

Twee mannen stappen in de trein op weg naar Eindhoven. De een (Tom) leest een rapport van het ROC Eindhoven. De ander (Frank) denkt, dat ken ik ergens van.
'Ik zie dat jij ook bij het ROC Eindhoven werkt', begint hij.
'Ja, jij ook?' Zo raken Frank en Tom aan de praat en ontstaat er iets moois.
Want wat blijkt: ze zijn allebei docent rekenen/wiskunde.
Tom geeft wiskundeles op de MBO-opleiding Bouwkunde en Frank geeft rekenles aan basiseducatie-cursisten.
Bij de leerlingen van Tom kan Frank zich wel iets voorstellen. Dat zijn de 16-20-jarigen, afkomstig van vbo/mavo. Daarvan heeft Tom er zo'n 28 in de klas.
Zoals wel vaker voorkomt heeft Tom geen idee wat basiseducatie-cursisten voor mensen zijn. Frank vertelt over de dubbele doelgroep: aan de ene kant zijn er de 'petjes'. Dat zijn drop-outs uit het reguliere onderwijs. Daarnaast zijn er de



mensen met een zeer lage opleiding, vol schaamte, onzeker en noem maar op.
'Maar in die basiseducatie, wat leer je die mensen daar dan?' vraagt Tom. En Frank begint enthousiast te vertellen. 'Een belangrijk aspect van de lessen is de GWA, ofwel de geïntegreerde wiskundige activiteit. Hierbij krijgen cursisten een (wiskundig) probleem voorgeschoteld dat ze moeten oplossen volgens het principe van het plan-do-review. Belangrijk is dat cursisten zich steeds afvragen welke vragen ze moeten stellen bij welke fase.'
Dat klinkt Tom als muziek in de oren. Want ook Tom blijkt meer te doen dan alleen lesstof overdragen. Hij vertelt dat hij is betrokken bij het TWIN-project, ofwel Techniek, Wiskunde, ICT, Natuurkunde. Voor dit project ontwikkelt hij materiaal voor het vak wiskunde. Een aspect bij dit nieuwe materiaal is dat er veel onderzoeksopdrachten in zitten. Deze lijken qua opbouw op de GWA, alleen heeft Tom dat zelf nog nooit in zijn groepen gebruikt. Tom twijfelt of zijn leerlingen dat kunnen. Ook vraagt hij zich af of hij zelf op een goede manier zo'n plan-do-review proces zou kunnen begeleiden.
Dit brengt Frank op een idee. Hij wil wel eens een GWA uitproberen in de groep van Tom. Nou dan wil Tom dat wel eens uitproberen in de groep van Frank. Zo ontstaat het idee om een keer met elkaar te ruilen, want je leert altijd wat van elkaar.
Ze besloten ook om er maar meteen een videocamera bij te zetten, zodat de rest van docerend Nederland er ook nog wat van kan leren.
Zo ontstond de video 'Over het spoor', een aanrader voor alle reken/wiskundedocenten op alle niveaus van de ROC's.
Want wat is er nu zo leuk aan deze video?
Er zitten twee interessante kanten aan dit product: de Geïntegreerde Wiskundige Activiteit en het uitwisselingsexperiment.

Geïntegreerde Wiskundige Activiteit

Volgens de Kwalificatie Structuur Educatie is de GWA een domein binnen het reken/wiskunde-onderwijs waar op elk niveau aandacht



aan besteed moet worden. Het doel van zo'n GWA is om cursisten te leren rekenwiskundige problemen op te lossen en daarbij rekenvaardigheden als een gereedschap te hanteren. Ook allerlei strategische en sociale en communicatieve vaardigheden komen bij een GWA aan bod. Het plan-do-review principe bijvoorbeeld is een onderdeel van de GWA. Ook bij het MBO wordt het steeds belangrijker gevonden om leerlingen opdrachten te geven, waarbij een onderzoeksmatige houding van belang is. In de dagelijkse beroepspraktijk krijgen mensen immers ook geen kant en klare gegevens tot hun beschikking. En er wordt van alles verwacht op het gebied van sociale, communicatieve en strategische vaardigheden. Het gaat dus bij een GWA om functionele en/of realistische rekenproblemen. Tom en Frank gebruikten in hun les de volgende opdracht:



Ontwerp een zo goedkoop mogelijke parkeerplaats bij een flatgebouw. Het enige wat de cursisten kregen was een foto van het flatgebouw in kwestie.
De opdracht was dus voor de basiseducatiecursisten exact hetzelfde als voor de MBO-cursisten. Dat kan ook bij een GWA. Het niveau van een GWA is namelijk niet alleen afhankelijk van de reken/wiskundevaardigheden die gevraagd worden. Je kunt immers differentiëren in de hoeveelheid begeleiding die je geeft, de extra gegevens die je aanlevert, de mate waarin cursisten zelfstandig het probleem moeten oplossen en de exactheid van de oplossing die je verwacht. Het is dan ook goed mogelijk om een GWA aan te bieden in een groep met veel verschillende niveaus.
Cursisten gaan bij een GWA actief samen aan het werk. Uiteindelijk komen ze allemaal met een oplossing. Het leuke is dat het niet gaat om het goede antwoord. Er zijn vele oplossingen mogelijk en elke oplossing heeft wel iets goeds in zich. Zo zal in het werkelijke leven ook gaan.

Het uitwisselingsexperiment

Zoals afgesproken geven Tom en Frank de GWA-les in elkaars groep. Een docent uit het hoogste niveau in een ROC en een docent uit het laagste niveau van hetzelfde ROC. Alleen al het verschil in gebouw en lokaal waarin wordt lesgegeven maakt de cultuurverschillen duidelijk. Een imponerend, groot gebouw tegenover een kleine afgeleefde school. Een ruim lokaal waar alle banken twee aan twee staan tegenover een lesruimte waar de muren vol papieren en illustraties hangen.
Wat er gebeurt als twee docenten uit verschillende disciplines in elkaars groepen les gaan geven is heel verhelderend.
Wat Frank bijvoorbeeld ontdekt bij de MBO-leerlingen is, dat ze nauwelijks in staat zijn om zelfstandig aan de slag te gaan. Ze zitten achterover, geven niet spontaan antwoord op zijn vragen en verwachten dat alle gegevens kant en klaar liggen, zodat zij het probleem op kunnen lossen. Het kost Frank ontzettend veel moeite om de leerlin-



gen aan het werk te zetten.
De basiseducatiecursisten daarentegen gaan meteen aan de slag. Zij weten wel hoe ze een probleem moeten aanpakken. Dat ze zich eerst moeten afvragen wat ze precies moeten doen, vervolgens gegevens gaan zoeken en dan aan de oplossing van het probleem gaan beginnen. Daar heeft Tom het makkelijk mee, maar waar hij tegenaan loopt is dat cursisten bepaalde rekenvaardigheden missen. Bijvoorbeeld het omgaan met

schaaltekeningen. Hij probeert dat op een volgens hem heel logische manier uit te leggen, maar wordt langzamerhand radeloos als de cursisten dit niet snappen.
Nog een verschil tussen MBO-leerlingen en cursisten basiseducatie: op een bepaald moment moeten de cursisten voor het uitvoeren van de opdracht weten hoe groot een parkeerplaats bij een flat is. Twee BE-cursisten pakken dit op een zeer praktische manier aan en gaan gewoon naar buiten om te meten. Daarna geven ze dit door aan de anderen.
Voor de MBO-leerlingen blijkt naar buiten gaan om te meten beneden hun waardigheid.
'Zijn die gegevens hier dan niet voorhanden?' vraagt een leerling. Dat blijkt niet zo te zijn.
'Je hebt de gegevens wel nodig,' oppert Frank. Dus doen de leerlingen maar wat wilde aannames. Ze



gaan van boven uit het gebouw naar een parkeerplaats in de verte staren om toch nog even te controleren of hun aanname logisch is.
Ook bij de nabespreking blijkt hoe docent-gericht deze MBO-cursisten zijn. Het is voor Frank moeilijk daar doorheen te breken. Hij moedigt ze aan om aan elkaar te vertellen hoe ze het probleem opgelost hebben en om elkaar vragen te stellen. Het lukt hem niet. Uiteindelijk wordt de nabespreking toch een serie tweegesprekken tussen Frank en afzonderlijke leerlingen. Na de les lopen de leerlingen weg en kijken niet meer om.

Tom heeft nog niet zoveel ervaring met de plan-do-review aanpak. De wijze van nabespreken van een GWA is voor hem nieuw. Aan het eind van de les weet hij het even niet meer. Maar geen nood, de basiseducatiecursisten slepen hem er wel doorheen. Je hoort Tom denken: 'Ik ben klaar, maar de cursisten nog lang niet...'
Ze gaan de tekeningen nog eens van voren af langs, willen weten wat de anderen nou moeilijk vonden, wat anderen hebben gedaan, of zij het ook leuk vonden. Er wordt nog heel wat nagepraat door de cursisten.
Natuurlijk zijn de MBO-leerlingen



uiteindelijk beter in staat om mooie schaaltekeningen te maken van de parkeerplaatsen. Wat de praktische aanpak van problemen betreft kunnen ze echter nog heel wat leren van de basiseducatiecursisten.



Noten

Op dit moment is de video nog niet verkrijgbaar. CINOP en het Freudenthal instituut zijn momenteel bezig met het maken van een brochure bij de band. Globaal zal daarin ingegaan worden op drie aspecten: de video als informatiemateriaal, het uitwisselingsexperiment en het lesmateriaal (de GWA). Er komen concrete aanwijzingen bij voor het gebruik, tips en werkvormen.
Wanneer de video en brochure verschijnen zullen we dit in Euclides vermelden.

Dit artikel is overgenomen uit Punt Komma, jaargang 10 nummer 3. Punt Komma is een uitgave van het onderwijsadviesbureau ECR te Rotterdam en is bestemd voor docenten in de beroeps- en volwasseneneducatie. Punt Komma verschijnt 6 keer per jaar. Informatie: Marja van den Hurk, 010-4255333 of e-mail: puntkomma@ecrotterdam.nl.

Nederlands Mathematisch Congres 1999

Het **Nederlands Mathematisch Congres 1999** wordt dit jaar gehouden op donderdag 8 en vrijdag 9 april 1999 te Utrecht (Uithof).
Op vrijdag 9 april van 12.10 - 15.45 is er een lerarensymposium over: 'Meetkunde: vaardigheden en bewijzen'.
Informatie: www.math.uu.nl/mc99 of mc99@math.uu.nl

School & Computer '99

Voor het zesde achtereenvolgende jaar worden in maart en april op zes plaatsen in het land School & Computer-beurzen gehouden.
Op School & Computer '99 zijn de belangrijke producenten van educatieve software aanwezig. Ook zijn er hardware-leveranciers en anderen die zich op de ICT-markt voor het onderwijs begeven. Op elke beurs staan 70-80 stands. Het Procesmanagement ICT in het onderwijs van het ministerie van OC&W houdt parallel aan de School & Computer-beurzen conferenties voor het onderwijs.

Plaatsen en data

17 maart Groningen, Martinihal

24 maart Eindhoven, Evoluon

31 maart Zwolle, IJsselhallen

7 april Amsterdam, RAI

14 april Nijmegen, Triavium

21 april Rotterdam, Erasmus Expo-centrum

Openingstijden: van 12.00 tot 17.00 uur. De toegang is gratis.

Producten

Op School & Computer zijn de laatste ontwikkelingen op het gebied van ICT voor educatief gebruik te zien. Er zijn voor alle schooltypen en -vakken diverse pakketten aanwezig. Ook verantwoorde software voor thuisgebruik ontbreekt niet. Verder: leerlingvolgsystemen en administratieve pakketten, roosterprogramma's, toetsingssoftware en pakketten voor de schoolbibliotheek. Bovendien bieden de beurzen informatie over licentiemogelijkheden en internetaansluitingen en zijn er aanverwante producten aanwezig, zoals hardware, computermeubilair, boeken en werkbladen.

Doelgroep

School & Computer is gericht op het basis- en voortgezet onderwijs en de beroeps- en volwasseneneducatie. Leraren, schooldirecties en -besturen, administrateurs en systeembeheerders, ouders en andere belangstellenden zijn welkom. Bijzonder is, dat het publiek niet alleen kan kijken, maar vooral ook zelf veel kan doen; bezoekers kunnen alle programmatuur zelf uitproberen. Het afgelopen jaar bezochten per plaats gemiddeld 1.250 belangstellenden de beurzen.

Workshops

Tijdens de beurzen (m.u.v. Zwolle) kunnen bezoekers kosteloos deelnemen aan een aantal workshops. Deze worden verzorgd door een uitgever of producent die een nadere toelichting geeft op de mogelijkheden van zijn/haar product. Een overzicht van de workshops met de wijze van aanmelden staat in de School & Computer-krant en op de School & Computer-website: www.ess.nl.

School & Computer-krant
In de tweede helft van februari verschijnt de School & Computer-krant. De krant wordt jaarlijks, in een oplage van 85.000 stuks, gratis bezorgd op alle scholen in Nederland. Het (privé) bestellen van de School & Computer-krant is mogelijk door overmaking van ƒ 5,- op Postbankrekening 300847 t.n.v. ESS te Groningen, o.v.v. 'krant' en het adres waar men de krant wenst te ontvangen. Vijf exemplaren kosten ƒ 12,50.

Regionale ICT-Onderwijs Dagen

Gelijktijdig met de School & Computer-beurzen '99 houdt het Procesmanagement ICT in het onderwijs van het ministerie van OC&W, zes regionale conferenties. Ze worden vijf keer op dezelfde lokatie als School & Computer gehouden en in Zwolle in de nabije omgeving. De conferenties zijn bedoeld voor leraren, ICT-coördinatoren en schoolleiders uit primair en voortgezet onderwijs, landbouwonderwijs en de BVE-sector. Ze zijn tevens bestemd voor lerarenopleidingen en onderwijsbegeleidingsdiensten. Doel van de bijeenkomsten is om de onderlinge samenwerking tussen scholen te bevorderen, waar het de invoering van ICT betreft. Belangstellenden kunnen zich aanmelden via het inschrijfformulier dat binnenkort op alle scholen in Nederland verschijnt. Bezoek voor meer informatie de website www.ess.nl.

CEVO-ijskast voor havo wiskunde A1,2 in 2000

In het vorige nummer van Euclides (zie: Van de redactietafel) stond gemeld dat de CEVO domeinen of subdomeinen kon aanwijzen die wel op het schoolexamen getoetst moeten worden maar niet op het centraal examen zullen worden gevraagd.
Voor het examen havo wiskunde A1,2 in 2000 is dit nu vastgesteld.
Het gaat om het subdomein 'Binomiale verdelingen' van domein G.
Bron: Uitleg 2/3, 27 januari 1999, p.25

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Van de bestuurstafel

Regionale bijeenkomsten
Ook dit voorjaar komt de vereniging weer naar u toe met een gevarieerd programma (zie blz. 164 in dit nummer). Deze bijeenkomsten hebben zich de afgelopen jaren in een toenemend aantal bezoekers mogen verheugen; we hopen dat die lijn dit jaar wordt voortgezet.

Examenbesprekingen
De organisatie van de normbesprekingen van de examens is al in volle gang. Het zal dit jaar niet in alle plaatsen mogelijk zijn op dezelfde school als vorig jaar terecht te kunnen. Ik hoop dat de macht der gewoonte mensen niet naar een dichte deur zal voeren. Vorig jaar waren er ook regionale besprekingen van het vbo-b examen. De belangstelling daarvoor was echter dermate gering dat we dit jaar voor vbo-b alleen een centrale bespreking organiseren in Utrecht, zodat er in elk geval enige terugkoppeling is naar de makers van die examens.

Met blijdschap geven wij kennis …

Het is inderdaad met enige gepaste trots en vreugde dat we u kunnen melden dat het eerste ZEBRA-boekje binnenkort van de pers rolt.
Dit eerste boekje heeft als titel ‘Kattenaids en Statistiek’ en is geschreven door Peter Kop en Jan van den Broek. Misschien op de Nationale Wiskunde Dagen, maar in elk geval op de regionale bijeenkomsten in april kunt u exemplaren aantreffen, en natuurlijk aanschaffen tegen een vriendelijk ledenprijsje van ƒ 12,50. De ZEBRA-reeks is in eerste instantie bedoeld voor vwo-leerlingen in de Tweede Fase als mogelijke invulling van de keuzeruimte in het nieuwe wiskundeprogramma. Daarnaast mikken we op een breder, algemeen publiek met belangstelling voor de wiskunde en de wiskundige toepassingen in andere disciplines. We willen namelijk ook de wiskunde wat aantrekkelijker presenteren dan nu vaak het geval is, en een beter beeld geven van het brede toepassingsgebied van ons vak. Het aanbod van dergelijke boekjes in ons kleine taalgebied is erg beperkt; het is commercieel ook niet zo aanlokkelijk. In uitgeverij Epsilon hebben we een gespecialiseerde partner gevonden die ons enthousiasme deelt en met wie we nu met een low-budget en bescheiden oplage proberen om de reeks gestalte te geven. Of het een succes wordt hangt uiteraard ook af van u ….

Voor scholen is er een abonnement mogelijk: per jaar ontvangt u 6 exemplaren van elk van de 5 delen voor ƒ 400,- inclusief verzendkosten.

De boekjes komen ook in de gewone boekhandel te liggen, en zijn dan circa ƒ 15,– per stuk.

AXIS
De ministeries van Economische Zaken en Onderwijs hebben, samen met werkgeversorganisaties, het beroepsonderwijs en universiteiten de stichting AXIS opgericht. Deze stichting moet de komende jaren initiatieven ontwikkelen om technische en exacte opleidingen en beroepen aantrekkelijker te maken. Men is er zich van bewust dat het voortgezet onderwijs hierin een belangrijke rol kan spelen. Met wellicht meer effect dan leuzen op de tram. In een gesprek hierover met de directeur van AXIS zijn mogelijke activiteiten van de vereniging in dit kader ook ter sprake gekomen. Mij is daarna gevraagd toe te treden tot een zogenaamd expertpanel, dat moet adviseren over mogelijke projecten. Het klinkt alsof men een en ander nu echt structureel wil aanpakken. Dat is ook noodzakelijk, want een tekort aan mensen met een stevige bèta-opleiding is uiteindelijk heel slecht voor de Nederlandse economie.

Marian Kollenveld

Regionale NVvW-studiebijeenkomsten

Dit jaar, op verzoek, in april
Een plezierige vorm van korte nascholing, niet te ver weg, met certificaat. U bent weer welkom in:

LEIDEN **donderdag 15/4**
Visser 't Hooftlyceum, Kagerstr. 1
tel. 071-5171661
NS uitgang Rijnsburgerweg (8 min. lopen): links, 3e straat rechts.

ZWOLLE **woensdag 21/4**
Greijdanuscollege, Campus 5
tel. 038-4698698
NS uitgang Zuid (10 min. lopen): rechtsaf, schuin over parkeerterrein, onder tunnel door, rechtsaf, achter HS Windesheim.

EINDHOVEN **maandag 26/4**
HS Eindhoven, Rachelsmolen 1
tel. 040-2605510
NS uitgang Noord (10 min. lopen): rechtdoor, weg over, na 300 m langs Kennedylaan linksaf (dus niet TU!), gebouw R1.

We zij erg blij dat ook nu een aantal mensen bereid is om geheel belangeloos hun speciale expertise aan u uit te dragen. Wij hopen dat er weer 'voor elk wat wils' is.

Programma

15.45-16.00
ontvangst, koffie/thee
16.00-16.55
plenaire voordracht
16.55-18.05
middagwerkgroepen
18.05-18.50
eenvoudige maaltijd en verkoop van posters en 'juwelen van de wiskunde-koningin'
18.50-20.00
vooravondwerkgroepen

Plenaire voordracht

De waarde van internet voor het wiskundeonderwijs
Michiel Doorman, Martin v. Reeuwijk, Gerard Koolstra
Via internet vind je informatie; kun je software afspelen (zonder schoolnetwerk of schijfjes) en e-mailen...
Het gebruik van internet (onder andere bij het maken van werkstukken), draagt bij tot de ontwikkeling van de steeds belangrijker geachte onderzoekshouding en vaardigheden.
Via concrete voorbeelden zullen we eerste ervaringen schetsen.

Middagwerkgroepen

A
Uitdagende, strategische spelletjes
Opgedaan bij een 'Platoreis' naar Hongarije onder leiding van prof. dr. Lajos Posa.
Deelnemers aan deze reis tonen hoe de leerlingen daar spelenderwijs leren redeneren en ongemerkt geïnteresseerd raken in wiskunde, vaak zodanig dat velen meedoen aan competities en olympiades.

B
Peanut-software in de tweede fase van havo/vwo
Agnes Verweij (TUD), Eugène Welling (UT), Lodewijk van Schalkwijk (KUN)
Bent u op zoek naar geschikte software voor wiskunde in de nieuwe tweede fase havo/vwo, die geen hoge kosten voor uw sectie en/of uw leerlingen met zich meebrengt? Maak dan kennis met de fraaie, (Windows,) Engelstalige Peanut-programmatuur, die via Internet gratis wordt aangeboden. We geven eerst een demonstratie en daarna een practicum rond het gebruik van deze software bij experimenteel leermateriaal voor wiskunde in 4, 5 en 6 vwo. Hierbij wordt een keuze gemaakt uit WinPlot, WinStats, WinFeed en WinGeom. Deze programma's hebben we voor u op diskettes gezet, zodat u en uw leerlingen er op school of thuis direct (verder) mee aan de slag kunnen gaan.

C
Wiskunde in leerwegondersteunend onderwijs
SLO, project wiskunde
Leraren in het huidige (i)vbo/mavo en vso lom geven straks wiskunde in het leerwegondersteunend onderwijs. Er wordt ingegaan op vragen als:
Welke leerlingen komen we in het leerwegondersteunend onderwijs tegen? Hoe richten leraren hun onderwijs in? Welke verschillende werkwijzen worden gehanteerd? Wat is daarvan te leren?
Ook wordt van gedachten gewisseld over de mogelijke inhoud van wiskunde in leerwegondersteunend onderwijs, de manier waarop scholen leerwegondersteunend onderwijs organiseren en wat dat voor de individuele leraar en het vak betekent.

D
PGO en wiskunde
TWIN-team
Probleem-Gestuurd Onderwijs (PGO) heeft binnen het mbo de afgelopen tijd zijn intrede gedaan. Binnen PGO is er sprake van verregaande vakkenintegratie. Vanuit opgedane ervaringen gaan we in op de gevolgen van PGO voor het vak wiskunde en de rol die wiskunde binnen PGO speelt.

F
Tweede fase in deeltijd
VAVO-docenten
Praktische opdrachten, zelfstandig leren, studiehuis... alles in een versneld tempo: het lijkt een onmogelijke opgave; temeer daar specifieke VAVO-regels nog ontbreken. In deze werkgroep kunnen VAVO-docenten ervaringen uitwisselen en tot afspraken komen over gezamenlijke voorbereidingen.

G (alleen in Leiden!)
Over het Langrond
Marco Swaen (HvA)
Kegelsneden (ellips, parabool, hyperbool) duiken in velerlei verbanden op. Nu zij in het vernieuwde vwo-wiskundeprogramma weer een rol zullen gaan spelen, is het misschien tijd voor een (hernieuwde) kennismaking. In dit geval aan de hand van vraagstukjes van Simon Stevin, die nu in de klas weer goed bruikbaar zijn. Passer en liniaal mee!

Vooravondwerkgroepen

Q
Nieuwe wiskunde in het studiehuis
Rob Birkhoff, Cor Hofstra, Leon v.d. Broek.
Van de elf scholen die meedoen met het Profi-project en die inmiddels enige ervaring hebben opgedaan met het nieuwe vwo-wiskunde B programma, zijn er drie in 1998 gestart met het studiehuis. Op elk van de bijeenkomsten zal één van de betrokken wiskundeleraren verslag doen van die ervaringen en een relatie leggen met de inrichting van het studiehuis.
Er zal ruimschoots gelegenheid zijn tot het stellen van vragen.

R
Praktische opdrachten in de onderbouw
David Lans
Gewicht toekennen aan vaardigheden, een probleem? In de workshop geeft hij voorbeelden van praktische opdrachten (van mavo- tot vwo-niveau), waarmee onderbouwklassen aan de slag zijn geweest; een verhaal over Flippo's, Joekels en nog veel meer.

S
Welke plaats krijgt mediagebruik in de wiskundeles?
Magda Bruin (Teleac-NOT)
Er zijn nu videobanden beschikbaar voor havo/vwo 1-3 en vbo/mavo 1-4. De video's zijn te gebruiken als introductie op een nieuw begrip of, meer individueel, om leerstof op een andere manier aan te bieden. Werkbladen per programma bieden verdieping, en er is een website met zoekopdrachten. Via een demonstratie van video, werkblad en opdrachten op de website krijgt u een indruk van de verschillende mogelijkheden. U krijgt iets mee naar huis.

T
Examendossier vmbo
SLO, project wiskunde
De herziene examenprogramma's voor vbo/mavo zullen in april wel vastgesteld zijn. Dan is ook de definitieve regeling bekend voor wat we nu schoolonderzoek maar straks examendossier noemen. Dat is een lijst met eisen waaraan de leerling moet voldoen, maar ook een dossier met leerlingenwerk, waaruit blijkt dat aan die eisen voldaan wordt. Van beide geven we in de werkgroep actuele informatie en praktische voorbeelden. Het gaat er dus niet alleen om hoe een examendossier er uit moet zien, maar ook hoe het er concreet uit kan zien.

U
Doorstroming mto-hto
TWIN-team
20% van de mto-leerlingen gaat naar het hto. Bij mto en hto wil men dat graag zo houden en de succeskans optimaliseren. Belangrijkste wens vanuit het hto ten aanzien van de instromer is de vaardigheid om een probleem uit het technisch vakgebied aan te pakken met geëigende wiskundige methodieken. Overleg hto-mto vanuit het TWIN-project, resulteerde in concepteindtermen die vrijwel volledig geïntegreerd zijn in het onlangs door de SLO opgeleverde officiële doorstroom-eindtermendocument.
Het TWIN-team ontwikkelde daar de leermiddelen bij, die inmiddels op een aantal scholen in gebruik zijn. U maakt kennis met de nieuwe eindtermen en materialen. Ook havo-(en vwo-) docenten N&T kunnen hier zien hoe het mto zijn studenten voorbereidt op het hto.

Certificaat
Wilt u een nascholingscertificaat ontvangen, vermeld dan bij uw aanmelding uw voorletters en uw geboortedatum. U krijgt na afloop van de studiebijeenkomst het certificaat uitgereikt op vertoon van een identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele bijeenkomst hebt bijgewoond. Certificaten kunnen niet worden nagestuurd.

Kosten
Voor leden van de NVvW, en degenen die bij aanmelding lid worden, is de bijeenkomst gratis. Van niet-leden wordt een bijdrage van ƒ 65,- gevraagd. Voor de maaltijd en koffie of thee dient elke deelnemer ƒ 17,50 te betalen.
Nieuwe leden betalen ƒ 40,– contributie tot augustus 1999 (half jaar), (studenten half geld!), en ontvangen de nummers van deze jaargang van Euclides (voor zover voorradig). De overschrijving van ƒ 17,50; ƒ 57,50 (studenten ƒ 37,50) of ƒ 82,50 op giro 4470718 t.n.v. NVvW, Dordrecht **moet vóór 20 maart** binnen zijn. Ter plaatse aanmelden is niet mogelijk.

Hoe aanmelden
Iedereen kan één middag- en één vooravondwerkgroep bijwonen. Voor elk dient men een eerste en tweede keuze op te geven i.v.m. de beperkte ruimte per werkgroep. **Wie zich het eerst meldt krijgt de eerste keuze.**
A. aanmelden via school:
Aan elke school wordt ook nog een aankondiging gestuurd. Breng uw collega's die nog geen lid zijn mee. Het is een mooie gelegenheid om hen lid te maken! Maakt uw school het bedrag over, dan dient u het schoolopgavebiljet in te zenden.
B. privé aanmelden:
Geschiedt de afschrijving met een overschrijvingsbiljet op uw eigen naam, vermeld dan de plaatscode Zw, Le of Ei; daarna de eerste en tweede keuze van respectievelijk de middag- en de vooravondwerkgroepen. Vervolgens uw telefoonnummer (i.v.m. bereikbaarheid bij problemen), uw voorletters en, als u een certificaat wilt, uw geboortedatum; bij gebruik van girotel ook uw adres. Voorbeeld:
LeBDRS071-5123456JJ1-1-'50

Bij vragen of problemen over de inschrijving kunt u zich wenden tot het commissielid Frans Osseweijer, Lindelaan 79, 3319 XJ Dordrecht, (078-6160576);
in andere gevallen tot het bestuurslid Agneta Aukema, 0320-226518.

Ten slotte
Uw inschrijving wordt niet bevestigd. Bij binnenkomst vindt u uw badge met codes voor uw werkgroepen.
Wij wensen u alvast veel genoegen.

Jaarrede 1998

Op zoek naar wiskunde, de titel van het themagedeelte vandaag, geeft mijns inziens treffend aan waar wij met z'n allen nu mee bezig zijn. Zowel het benutten van de mogelijkheden van de snel verbeterde technologie als het vorm geven aan wensen en eisen voor meer onderzoeksgericht onderwijs dwingen ons ver buiten de grenzen van onze oude schoolwiskunde te kijken. Hopelijk gebeurt dit met veel plezier.

'Problem solving' en 'Discovery learning' zijn al lang modekreten in ons vak, maar kunnen helaas ook aanleiding geven tot het inslaan van een verkeerde weg. Hans Freudenthal beschreef in zijn 'China Lectures' hoe problem solving vaak ontaardt in het oplossen van problemen die speciaal voor de gelegenheid bedacht zijn door docent of leerboekauteur, en wat discovery learning, het ontrafelen van opzettelijk verward gemaakte problemen, kan betekenen. Hij stelde voor om aan te sturen op 'guided reinvention', waarbij leerlingen voor een gedeelte zelf problemen zoeken in de wiskunde, waarbij ze stapsgewijs ontdekkingen doen en waarbij ze werken in een omgeving waar zoveel leiding voor handen is als ieder nodig heeft! Kennis en vaardigheden verkregen door eigen activiteiten beklijven immers beter dan wanneer ze opgedrongen zijn. Misschien had Freudenthal al een goed opgezet studiehuis in gedachte!

Bestuursstructuur
Een mijlpaal vormde het besluit van onze algemene ledenvergadering van 10 juni om de bestuursstructuur te wijzigen. Niet alleen is daar vastgelegd dat wij, door inschakeling van veel meer leden, via allerlei werkgroepen het vele werk dat voor wiskunde in onderwijsland op ons afkomt gaan verdelen, maar ook dat er een gedeeltelijke vergoeding voor enkele posten binnen het bestuur zal komen. Hoewel het werken met bestuurskrachten die voor een veel groter deel vrijgesteld zijn van hun schooltaak, pas een ideale situatie zou geven, verheugen wij ons op deze eerste stap in de richting van een bestuursvorm die voor nog betere dienstverlening zorg kan dragen.

Computeralgebra en Symbolische Rekenmachine
De vorig jaar ingestelde commissie Computeralgebra en Symbolische Rekenmachine is zeer voortvarend te werk gegaan en heeft ons in mei al een eindrapport met adviezen aangeboden. Zij stelt voor om experimenten op gang te brengen, omdat de geweldige technologische mogelijkheden bij het bedrijven van wiskunde een vaststaand feit zijn, maar de didactische problemen nauwkeurig onderzocht moeten worden. Het bestuur hoopt medewerking van de overheid te verkrijgen voor dergelijke experimenten. Wij danken de commissie, die onder leiding stond van Wim Kremers, heel hartelijk voor de buitengewoon consciëntieuze manier waarop ze hun werk in korte tijd hebben volbracht.

Nomenclatuurcommissie
Ook verdient vermelding het werk van onze nomenclatuurcommissie. Zij hebben onder zware druk moeten werken omdat de nieuwe schoolboeken tijdig klaar moesten zijn. Rob Bloem en Kees Lagerwaard hebben samen met een aantal auteurs de belangrijkste zaken op papier gekregen en wij hopen dat binnenkort een bestuursversie uitgegeven kan worden die ook op Internet te bekijken zal zijn.

Vragenformulier leden
Het vragenformulier dat wij in maart aan de leden hebben toegezonden, met de bedoeling om het ledenbestand te actualiseren heeft een zeer goede respons gehad. Meer dan 85% van de leden heeft het formulier teruggestuurd en daar zijn wij zeer verheugd over. De reacties op de nieuwe plannen zijn duidelijk positief. De aanmelding voor de op te richten werkgroepen was ook hoog, waaruit wij afleiden dat men duidelijk met ons meeleeft. We moeten zelfs om teleurstellingen te voorkomen mededelen dat we niet iedereen, die zich opgegeven heeft voor één of meer van de gevraagde taken, onmiddellijk in een werkgroep of commissie kunnen plaatsen. Nog niet alle groepen zijn van start gegaan, maar wij weten u tezijnertijd zeker te vinden.
Overigens zal iedereen wel beseffen dat het verwerken van meer dan 2800 formulieren een gigantische klus is geweest en ik bedank met name Elly van Bemmel vanaf deze plaats voor het vele werk dat zij verzet heeft om alle gegevens in onze administratie op te slaan.
Uit de ingevulde formulieren was ook af te lezen dat de voortdurende grote veranderingen in ons onderwijs hebben geleid tot een idioot hoge werkdruk bij erg veel leden. Het bestuur zal dergelijke signalen stellig nog meer aan onze beleidsbepalers doorgeven in de hoop dat er op den duur verbetering zal komen. In alle landen waar wij contacten met scholen gehad hebben, blijkt de grootte van de volle leraarsbaan en tevens het aantal leerlingen per groep, aanzienlijk kleiner te zijn dan in ons land. Het is een politieke kwestie en dus niet eenvoudig op te lossen.

Jan Breeman-serie Zebraboekjes
Er zijn momenteel verschillende auteurduo's bezig met het schrijven van boekjes in onze 'Jan Breeman-serie'. Zoveel mogelijk is gezocht naar een koppeling van een ervaren docent met een expert in het onderwerp. De boekjes zijn te gebruiken voor de ZEBRA-blokken in het vwo en moeten in ongeveer 20 studielasturen (slu) door een leerling zelf te bestuderen zijn. We streven ernaar dat er een zeer gevarieerde brede keuzemogelijkheid is en hopen dat docenten en geïnteresseerde leken de complete serie zullen aanschaffen. In elk geval moet ons initiatief gezien worden als een poging om de belangstelling onder leerlingen voor een bètastudie te verhogen.

Mbo
Als gevolg van de Wet Educatie Beroepsonderwijs (WEB) is er in het schooljaar 1997/1998 in het mbo voor het eerst gewerkt met nieuwe eindtermen en leerplannen. Deze veranderingen hebben op veel scholen geleid tot een vernieuwde werkwijze, zowel op inhoudelijk als op didactisch gebied. Er is overleg op gang gekomen tussen het mbo en het hbo over de invulling van het doorstroomprogramma voor de vakken wiskunde en natuurkunde. Richtinggevend voor de inhoud van het doorstroomprofiel, zijn de inhoud van het havo-profiel natuur en techniek en de inhoud van de nieuwe leerplannen voor de eerste vier semesters van het mbo. Wij hopen dat in het cursusjaar 1998/1999 het nieuwe doorstroomprofiel vorm zal krijgen.

Hbo
In het hbo zelf maakt het vak wiskunde stormachtige tijden door. Door de grote diversiteit in het hbo en geluiden die ons bereikten over gebrekkige communicatie in het hbo, is het bestuur van de NVvW van plan een werkgroep voor het hbo op te richten. Als startpunt wordt er samen met het Nederlandse Genootschap voor Besliskunde (behorende bij de Vereniging voor Statistiek) een symposium georganiseerd, waarin met de betrokken partijen gesproken gaat worden over de rol die de wiskunde in het hbo in de toekomst moet gaan spelen.

SLO
De SLO heeft het afgelopen jaar met de uitgave van 'Een rijk verrijkingsdeel' de kroon op het werk gezet betreffende voorbeelden voor een gedifferentieerde aanpak van de mogelijke verrijkingsstof in het toekomstige vmbo. Gaarne willen wij de medewerkers aan de brochure hartelijk bedanken voor het ons inziens uitermate nuttige werk dat ze voor vmbo-docenten hebben verricht.
De SLO zal, op aanvraag van het bestuur, informatie uitbrengen over het leerwegondersteunend onderwijs. De handreiking zal voorbeelden geven waarmee we leerlingen verder kunnen helpen. Vandaag is al veel daarover te horen in enkele werkgroepen. Het bestuur heeft de SLO ook gevraagd onderzoek te doen over profielwerkstukken, het examendossier en ICT-zaken.

Examens
De examens zijn het afgelopen jaar redelijk goed verlopen. Het normhandhavings-systeem schijnt hier en daar al vruchten af te werpen. Jammer genoeg heeft het experimentele examen Profi-B, dat dit jaar voor de tweede keer werd afgenomen, te zien gegeven dat er op

een te hoog niveau gemikt is. Aangezien het examen vorig jaar wel prima is verlopen is vermoedelijk onderzocht of de bovengrens, wat de moeilijkheidsgraad betreft, hoger gelegd kon worden. Uiteraard is dit bij een experiment een nuttig doel. Geen van de leerlingen is de dupe geworden daar er soepel is omgesprongen met de scores. Een tijdelijke of definitieve reductie van de examenstof lijkt voorlopig een oplossing voor het probleem. Hoewel het maken van examenopgaven op zich moeilijk, maar bijzonder leuk werk is moet men in de komende jaren wel veel begrip opbrengen voor de gigantische klus die de verschillende constructiegroepen en de Cito-medewerkers boven het hoofd hangt: experimentele examens, examens oude stijl en examens voor de eerste groep van de tweede fase staan op het programma. Daarbij moeten de examenmakers rekening houden met het feit dat leerlingen soms wel en soms niet profijt mogen hebben van de grafische rekenmachine. Sterkte gewenst.

Vrouwen en Exacte Vakken

Sylvia van der Werf heeft het werk bij Vrouwen en Exacte Vakken moeten opzeggen in verband met de overstap naar een nieuwe baan op de VU te Amsterdam. Zij was vanaf 1981 werkzaam bij de Werkgroep Vrouwen en Wiskunde en daarna bij de Stichting Vrouwen en Exacte Vakken. Zeer groot was haar inbreng bij de vele projecten in het belang van het wiskundeonderwijs aan meisjes. Wij wensen haar succes in de nieuwe baan.

Euclides

Ons tijdschrift Euclides is een blad om trots op te zijn. Redactieleden hartelijk dank hiervoor. Bert Zwaneveld heeft in de loop van het jaar afscheid genomen en de voorzitterstaak is tijdelijk overgenomen door de penningmeester Victor Schmidt. Tijdens een afscheidsbijeenkomst voor Bert heeft het bestuur Bert duidelijk gemaakt hoe dankbaar wij zijn voor het vele dat hij al gedurende lange tijd voor de NVvW heeft gedaan. Zijn werk in wiskundeland is nog lang niet afgelopen, daar het uiterst precieze werk in de vaksectie van de CEVO veel zal vragen. Veel succes Bert.

Wereldwiskunde Fonds

We verheugen ons over de steun die ons bijzonder Wereldwiskunde Fonds van de leden blijft krijgen. Zoals u hebt kunnen lezen is dit jaar geld geschonken aan een lerarenorganisatie in Mozambique, nadat de vorige twee jaren schoolboeken gegeven zijn aan scholen in Zambia en Zimbabwe.

Pythagoras

Het tijdschrift Pythagoras heeft het hoge niveau weten vast te houden en zal hopelijk ook een belangrijke bijdrage kunnen leveren aan de speurtocht van wiskundeleraren naar bruikbare interessante wiskunde voor profielwerkstukken, praktische opdrachten en dergelijke. Inmiddels is het Wiskundig Genootschap de nieuwe uitgever geworden en wordt het gedrukt bij Giethoorn-Ten Brink in Meppel. We zullen de misdrukjes in het eerste nummer maar toeschrijven aan de hoge waterstanden. Iedereen krijgt of heeft gekregen een verbeterde druk.
Door de leuke prijsvraag in verband met de honderdste verjaardag van wijlen M.C. Escher heeft menig leerling weer de raakvlakken van wiskunde en kunst kunnen zien en beleven. Ongeveer 600 inzendingen heeft de jury mogen bestuderen en zij waren onder de indruk van de hoge kwaliteit. De NVvW heeft de geldprijzen voor de onderbouwleerlingen ter beschikking gesteld en ik kan u mededelen dat de drie jonge prijswinnaars zowel in artistieke als in wiskundige zin, bijzonder fraai werk hadden ingestuurd. Op de markt zijn de inzendingen van de prijswinnaars te bewonderen. De zeer actieve redactieleden Chris Zaal en Erjen Lefeber onderzoeken of foto's van de inzendingen op Internet te krijgen zijn. Verder hopen wij dat zij ook op de Nationale Wiskunde Dagen rechtstreeks of met behulp van dia's de vele mooie inzendingen zullen laten bewonderen.

Website NVvW

De NVvW gaat met haar tijd mee, dat is bekend. Zo hebben velen al gezien, dat de vereniging een eigen Website heeft ontwikkeld. Vandaag zal die hier worden gepresenteerd. Complimenten voor Gerard Koolstra die ons ontwerp heeft ontwikkeld en er voortdurend mee bezig is, om te zorgen dat u een eenvoudige toegangspoort heeft voor informatie op het gebied van wiskundeonderwijs.

Ten slotte

In het themagedeelte vandaag is er weer een grote diversiteit aan werkgroepen, waaraan u kunt deelnemen. Harrie Broekman, Joke Daemen, Lucy Schipper en Martinus Riemersma hebben vanuit de Utrechtse Lerarenopleiding veel gedaan om voor u een interessant programma te maken. We hopen weer een stapje dichterbij ons doel te komen, namelijk een vereniging te worden, die voor alle sectoren van het wiskundeonderwijs wat te bieden heeft. Ik wens u een leerzame en genoeglijke dag toe.

Hans van Lint

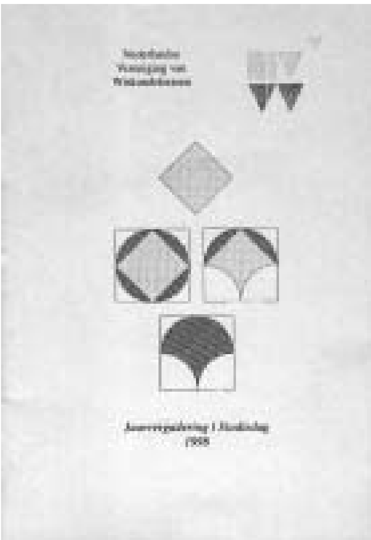
Noot

Deze rede werd door voorzitter Hans van Lint uitgesproken aan het begin van de jaarvergadering/studiedag van de NVvW op 14 november 1998.

Puzzels uit het programmaboekje van de jaarvergadering/studiedag 1998, met de oplossingen

Voorproefje

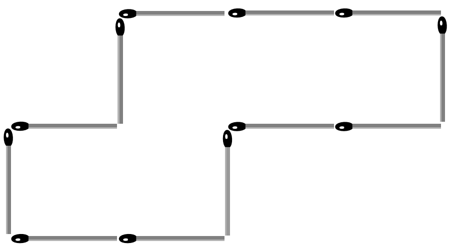
1 Weet u wat de tekening hieronder tracht te laten zien?



2 Hebt u enig idee of dit resultaat altijd te verkrijgen is?
3 Kunt u uw antwoord bij 2 ook bewijzen?

Voor de terugreis

1 Maak van de figuur hieronder een andere veelhoek met oppervlakte 3 eenheidsvierkanten. Lucifers mogen niet gebroken worden. De eenheid is 1 lucifer.



2 $a^b \times c^a = abca$
Hoe groot zijn a, b en c?

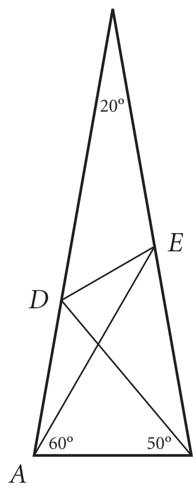
3 U hebt alleen een liniaal tot uw beschikking. Hoe kunt u daarmee in één meting de lengte van de lichaamsdiagonaal van de baksteen bepalen?



4 $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}}}$
Waar is deze wortelvorm gelijk aan?

5 Op een feestje geven aan het einde alle aanwezigen elkaar een hand. Terwijl men afscheid neemt komt er een ongenode gast binnen die enkele bekenden een hand geeft. Al met al zijn er 68 handen geschud. Hoeveel mensen kende de ongenode gast?

6



Gegeven: $\angle ABC = \angle BAC$
$\angle ABD = 50^0$
$\angle BAE = 60^0$
Gevraagd: $\angle AED$

7 Wat is het kleinste positieve getal waarmee 180 vermenigvuldigd moet worden om een derde-macht te krijgen?

8 Wat is het grootste **gehele getal** dat een factor moet zijn van $n^5 - 5n^3 + 4n$?

9 Een vijfvlak heeft de volgende grensvlakken:
twee gelijkzijdige driehoeken met zijde 20 cm; twee gelijkbenige trapezia met zijden 20 cm, 20 cm, 20 cm en 40 cm; één vierkant met zijde 20 cm.
Teken dit vijfvlak.
Indien u 2 van deze vijfvlakken hebt wat kunt u daar dan van maken?

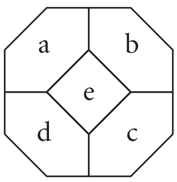
10 Iedere letter staat voor een cijfer; zelfde letter = zelfde cijfer. De * mag u zelf invullen.

```
AN / E A S Y \ ONE
      * T
      * * *
      * * R
          * *
          * Y
```

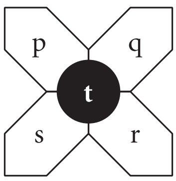
11 Wat is de kleinste gehele rest als u 3^{263} deelt door 1998?

12 Bij deze puzzel gelden de volgende twee regels:

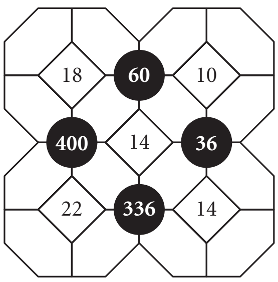
Eerste regel:
$a + b + c + d = e$



Tweede regel:
$p \times q \times r \times s = t$



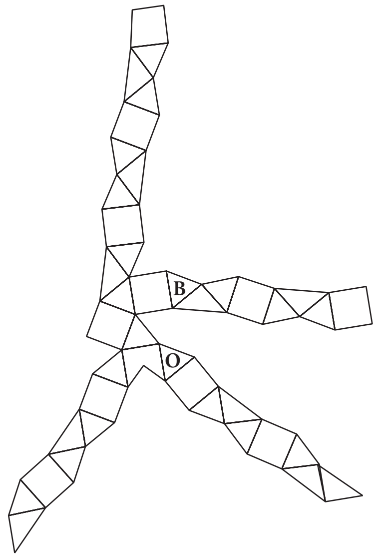
De puzzel



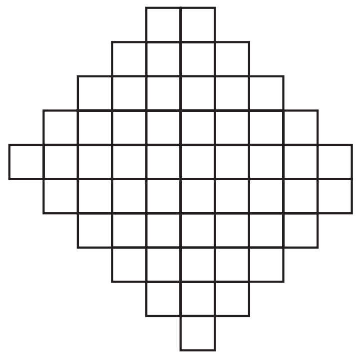
Gevraagd wordt de juiste getallen in de lege plaatsen in te vullen.

Cubeoctahedron

Dit is het vlechtpatroon van een kubus waarvan alle hoeken zijn afgehaald. Aan u de schone taak er een echt twintigvlak van te vlechten door alleen maar te vouwen. Als aanwijzing voor het begin: B dient op O te komen.



Eénlijner



Kunt u de figuur in één keer tekenen zonder het potlood van het papier te halen?
Shongo kinderen doen dit in het zand.

Alphamatic

Ook al een keer op de Nationale Wiskunde Dagen geweest? Dan weet u dat men daar onderstaande optelling propageert. Ieder letter staat voor één van de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 of 9.

```
   F I T
 + M E N
 -------
   J O G
```

Voor de TI-83

Kunt u voorspellen wat uit het volgende programma komt?

```
: ClrHome
: √5/5 →A
: (1 + √5)/2 →R
: (1 − √5)/2 →S
: Prompt N
: AR^N−AS^N →F
: Disp "F(N)"
: Disp F
```

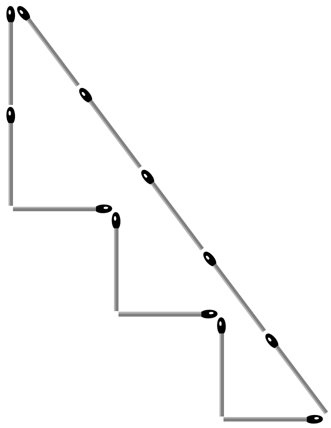
OPLOSSINGEN

Voorproefje

1 De donkergrijze vorm onder heeft dezelfde opp. als het vierkant boven. **2** Dit gaat altijd. **3** Zie Problems & Solutions from the Mathematical Visitor blz. 42 no. 3.

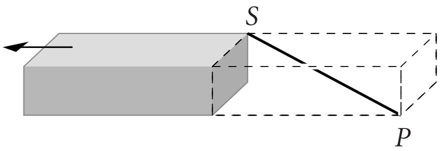
Voor de terugreis

1



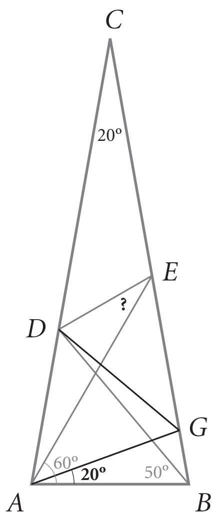
2 $a = 2$, $b = 5$, $c = 9$.

3 Leg de baksteen op een tafel. Verschuif hem een lengte en meet nu PS.



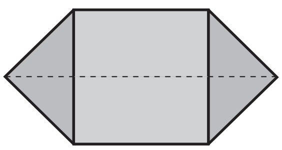
4 3 ; **5** 2

6 Trek AG met $\angle BAG = 20^0$.
$\angle ADB = 50^0$ en
$\angle AGB = 80^0$; $\angle DAG = 60^0$ en
$AD = AG$.
Nu is $\angle AGD = 60^0$ en dus is
$AG = DG$.
$\angle GAE = 40^0$; $\angle AGE = 100^0$. Dan is
$\angle GEA = 40^0$ en dus is $AG = EG$. Dit geeft dat $DG = EG$ en $\angle GED = 70^0$
$\rightarrow \angle AED = 30^0$

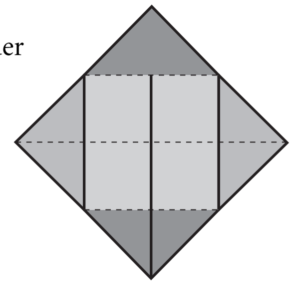


7 150 ; **8** 120

9

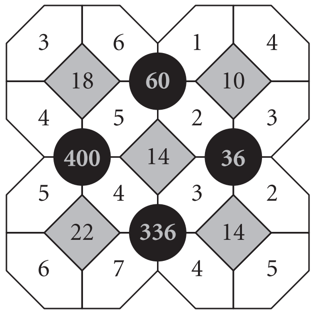


Twee op elkaar geeft een tetraëder



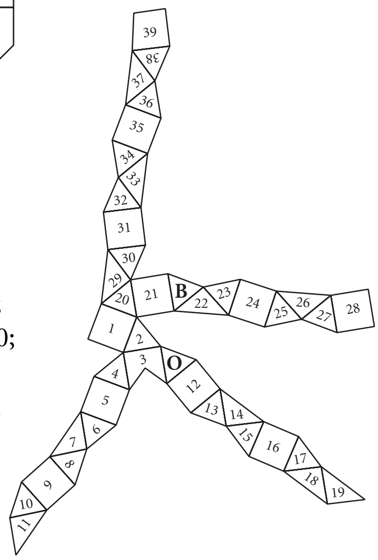
10 18 / 5130 \ 285 ; **11** 729

12

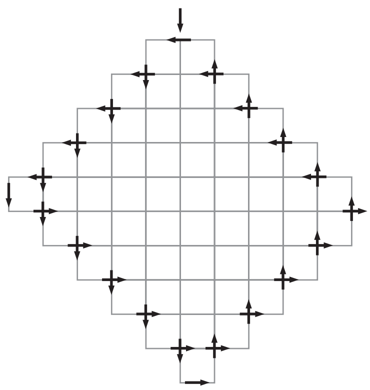


Cubeoctahedron

Volgorde van vlechten:
B op O; 12 op 31; 32 op 23;
3 op 33; 4 op 34; 24 op 5;
6 op 13; 15 op 25; 16 op 35;
27 op 20; 36 op 27; 38 op 30;
8 op 38; 9 op 28; 10 op 2;
11 op 3; 17 op 10; 18 op 11.



Eénlijner



Alphametic

Eén mogelijkheid is:

$$\begin{array}{r} 154 \\ +\,782 \\ \hline 936 \end{array}$$

Voor de TI-83

Een rij Fibonaccigetallen

Noot

Opgaven uit '**The Australian Mathematics Teacher**', het Amerikaanse '**Mathematics Teacher**' en het Duitse '**Alpha**', verzameld door Sjoerd Schaafsma.

De 37e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1998

Fred Bosman

De eerste ronde is gespeeld op vrijdag 3 april 1998. De deelnemers kregen drie uur de tijd om te proberen een antwoord te vinden op dertien vraagstukken; zes in de A-categorie, waarmee twee punten per opgave kon worden gescoord; vier in de B-categorie, goed voor drie punten per opgave en drie in de C-categorie met vier punten per opgave. De maximaal te behalen score was dus zestien punten. De maximale score werd dit jaar behaald door drie deelnemers.

Het hierna volgende overzicht van de resultaten van de eerste ronde is gebaseerd op de gegevens van 2365 leerlingen. Die werden opgestuurd door de wedstrijdleiders van 220 scholen. Ten opzichte van 1997 betekent dat, jammer genoeg alweer, een daling van 27 in het aantal deelnemende scholen en 240 in het aantal deelnemers.

De school met de hoogste resultaten van de beste vijf deelnemers wint de door Shell ter beschikking gestelde wisselprijs. Dat is dit jaar het Gymnasium Felisenum in Velsen-Zuid met een score van 128.

De deelnemende leerlingen waren als volgt verdeeld over de verschillende klassen en schoolsoorten (de getallen tussen haakjes zijn de aantallen deelnemers in 1997):

5-vwo	**1246**	(1433)
5-havo	**29**	(80)
4-vwo	**675**	(757)
4-havo	**155**	(164)
2e of 3e klas	**260**	(171)

De stijging in het aantal deelnemers uit een 2e of 3e klas is het enige lichtpuntje in deze cijfers.
De verdeling van de leerlingen over de scores is als volgt:

score	aantal leerlingen	score	aantal leerlingen
0	**83**	19	**42**
1	**0**	20	**30**
2	**106**	21	**27**
3	**97**	cesuur	1998
4	**94**	22	**20**
5	**148**	23	**18**
6	**92**	24	**9**
7	**211**	25	**9**
8	**161**	26	**9**
9	**176**	27	**5**
10	**174**	28	**3**
11	**126**	29	**10**
12	**174**	30	**5**
13	**78**	31	**2**
14	**164**	32	**4**
15	**80**	33	**0**
16	**89**	34	**0**
17	**65**	35	**0**
18	**51**	36	**3**

Leerlingen die een score behalen van 22 punten of meer worden uitgenodigd voor de tweede ronde. Van de 97 leerlingen die dat betreft, komen er 66 uit 5-vwo, 2 uit 5-havo, 28 uit 4-vwo en 1 uit een derde of tweede klas.

Op het resultaten-formulier van de eerste ronde konden wedstrijdleiders aangeven hoeveel deelnemers de verschillende opgaven goed gemaakt hadden. Van 2200 leerlingen zijn deze gegevens bekend. Hieronder staat dit resultaat in tabelvorm. In de rij ‘percentage’ staat vermeld hoeveel procent van de deelnemers de betrokken opgave goed heeft opgelost.

Opgave	Perc. 1998	Perc. 1997 ter vergelijking
A1	**72**	64
A2	**45**	75
A3	**67**	86
A4	**30**	37
A5	**27**	26
A6	**24**	34
B1	**53**	73
B2	**62**	13
B3	**23**	35
B4	**5**	8
C1	**7**	41
C2	**6**	9
C3	**2**	11

Samenvattend blijkt uit al deze cijfers dat de opgaven van dit jaar moeilijker zijn geweest dan de opgaven van 1997. Toen lag de cesuur bij 26 punten, nu bij 22. Ook de gemiddelde score geeft dat aan. In 1997 was die 12, 94, die is nu 10, 21.

De tweede ronde is gespeeld op vrijdag 18 september 1998. Van de 97 leerlingen die zijn uitgenodigd op grond van hun resultaten in de eerste ronde hebben er 93 daadwerkelijk deelgenomen. Bovendien zijn er nog 4 leerlingen uitgenodigd op grond van hun prestaties in de Pythagoras Olympiade.
De tweede ronde bestond uit 5 opgaven met een maximale score



van 10 punten per opgave. De beschikbare tijd was drie uur. Bij een gelijke score in de tweede ronde bepaalt het puntenaantal in de eerste ronde de einduitslag.

De 10 prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1998 staan in de lijst hieronder vermeld, met de door hen behaalde scores in elke ronde.

Prijswinnaars Nederlandse Wiskunde Olympiade 1998

Naam	Plaats	Score 1e ronde	Score 2e ronde
Gertjan Kok	Rijswijk	30	50
Jos Brakenhoff	Castricum	29	48
Herbert Beltman	Markelo	36	46
Allard Veldman	Velsen-Zuid	36	42
David van Deijk	Veldhoven	32	42
Jelmer Graafstra	Eindhoven	22	42
Rene Pannekoek	Epe	29	41
Chaim Zonnenberg	Waddinxveen	29	41
Freek v.d. Hagen	Vierlingsbeek	23	36
Marco Kleuskens	Asten	23	36

Het scoreoverzicht van de deelnemers aan de tweede ronde

Score	Aantal leerlingen in '98	Aantal leerlingen in '97 ter vergelijking
0 t/m 9 punten	11	22
10 t/m 14 punten	17	38
15 t/m 19 punten	24	35
20 t/m 24 punten	19	12
25 t/m 29 punten	6	7
30 t/m 39 punten	9	1
40 t/m 50 punten	8	1

Uit deze tabel blijkt dat de opgaven dit jaar minder moeilijk zijn geweest dan die van 1997. De moeilijkheidsgraad is vergelijkbaar met die van de tweede ronde van 1996

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

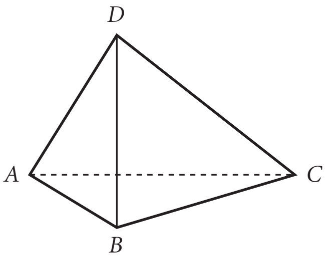
Tweede ronde

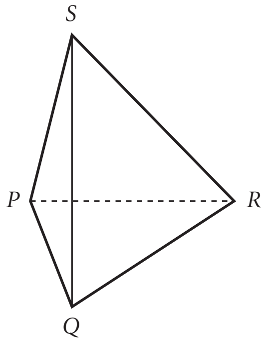
18 september 1998

1 We zetten de getallen 0, 1, 2, …, 9 in een willekeurige volgorde. Van elk drietal opeenvolgend geplaatste getallen in het rijtje bepalen we de som.
Het maximum van die sommen noemen we M.
Voorbeeld: voor het rijtje 4, 6, 2, 9, 0, 1, 8, 5, 7, 3 is M gelijk aan 20 $(= 8 + 5 + 7)$.
a Bepaal een rijtje met $M = 13$.
b Bewijs dat er geen rijtje bestaat met $M = 12$.

2 Een vierzijdige piramide $\overset{T}{ABCD}$ heeft een vierkant met zijde 4 als grondvlak. Van de vier zijvlakken is minstens één zijvlak een gelijkzijdige driehoek en ook minstens één zijvlak een rechthoekige driehoek.
Welke waarde(n) kan de inhoud van de piramide aannemen?

3 Van twee positieve gehele getallen m en n is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud gelijk aan 133866 $(=2\times3\times3\times3\times37\times67)$.
Het verschil is gelijk aan 189.
Bereken m en n.
(*Het is niet voldoende getallen voor m en n te noemen en te laten zien dat deze aan de voorwaarden voldoen. Uit een berekening of redenering zal moeten blijken dat je alle mogelijkheden gevonden hebt.*)





4 Gegeven is een convexe *) vierhoek *ABCD* waarin de diagonalen loodrecht op elkaar staan.

a Bewijs: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

b Als *PQRS* een convexe vierhoek is met $PQ = AB$, $QR = BC$, $RS = CD$, $SP = DA$, dan staan de diagonalen loodrecht op elkaar. Bewijs dit.

5 Bepaal alle oplossingen van de vergelijking:
$(x + 1995) \cdot (x + 1997) \cdot (x + 1999) \cdot (x + 2001) + 16 = 0$

* Convex betekent: alle hoeken zijn kleiner dan 180°.

Uitwerkingen Tweede ronde 1998

1

a Bijvoorbeeld: 9, 3, 1, 7, 4, 2, 6, 5, 0, 8.

b Omdat van de vier getallen 9, 8, 7, 6 er geen twee samen in een drietal mogen staan als moet gelden $M = 12$, moeten die vier getallen op de met × gemerkte plaatsen staan in onderstaande figuur.

×			×			×			×

Omdat vervolgens de 5 niet met de 8 of de 9 samen in een drietal mag voorkomen, kan de 5 alleen in het schema worden gezet als op twee opeenvolgende met × gemarkeerde plaatsen de 6 en de 7 staan. Dus moet in de rij voorkomen
a) 6• •7• • of b) •6• •7• of c) • •6• •7 , waarbij 5 en 0 tussen de 6 en de 7 staan.
In geval a) zijn de getallen 1, 2, 3 en 4 over. Tussen de 8 en de 9 moeten dan de 1 en de 2 geplaatst worden. Naast de 7 komen dan rechts de 3 en de 4, dus is er een drietal met som 14.
In geval b) moet komen 6507 (6057 kan niet omdat dan rechts van de 7 weer een keer de 0 nodig is). Daarna moet links van de 6 de 1 geplaatst worden. Tenslotte moeten de 2, 3 en 4 geplaatst worden. Als je rechts van de 7 de 2 en de 3 plaatst, dan heeft het laatste drietal de som 13 $(2 + 3 + 8)$ of 14 $(2 + 3 + 9)$.
In geval c) moeten weer 0 en 5 tussen de 6 en de 7 geplaatst worden. Tussen de 8 en de 9 moeten weer de 1 en de 2. De 3 en de 4 moeten dan samen met de 6 in een drietal.
Dus geen van de mogelijkheden geeft een oplossing. Daarmee is het bewijs rond.

2 Veronderstel dat driehoek *ABT* gelijkzijdig is. Dan moet de top van de piramide liggen in het vlak dat loodrecht staat op ribbe *AB* en door het midden van *AB* gaat. Voor de rechthoekige driehoek als zijvlak zijn er dan twee verschillende mogelijkheden:

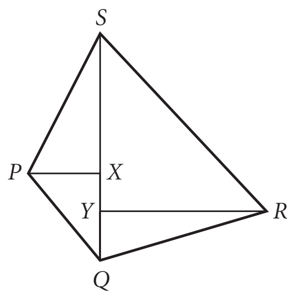
a driehoek *BCT* is rechthoekig (en dan ook driehoek *ADT* vanwege de symmetrie) of b) driehoek *CDT* is rechthoekig.
In geval a) moet de rechte hoek van driehoek *BCT* bij *B* zitten omdat de driehoek gelijkbenig is (want $BT = BA = BC$). Dus $BC \perp BT$. Analoog geldt ook $AD \perp AT$ en dus ook $BT \perp ABT$ en dus $ATB \perp ABCD$. De inhoud van de piramide is dan

$$\frac{1}{3} \times 4^2 \times 2\sqrt{3} = \frac{32}{3}\sqrt{3}.$$

In geval b) is driehoek *CDT* niet alleen rechthoekig maar ook gelijkbenig omdat moet gelden $TC = TD$. Noem het midden van *AB* *M* en het midden van *CD* *N*. Dan geldt voor driehoek *MNT*: $MN = 4$, $NT = 2$ en $MT = 2\sqrt{3}$. Dus is driehoek *MNT* rechthoekig in *T*. Omdat driehoek *MNT* loodrecht op het grondvlak staat is de hoogte van de piramide gelijk aan de lengte van de hoogtelijn uit *T* in driehoek *MNT*. Die lengte is $\sqrt{3}\,(lengte \times 4 = 2 \times 2\sqrt{3})$. Dus de inhoud van de piramide is dan gelijk aan

$$\frac{1}{3} \times 4^2 \times \sqrt{3} = \frac{16}{3}\sqrt{3}.$$

3 Omdat het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van *m* en *n* een 27-voud is, moet minstens één van de getallen een 27-voud zijn. Omdat het verschil *m*-*n* ook een 27-voud $(189 = 7 \times 27)$ is, moeten beide getallen een 27-voud zijn.
Noem $m = 27 \times p$ en $n = 27 \times q$, dan geldt voor *p* en *q*: $p - q = 7$ en het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van *p* en *q* is gelijk aan $2 \times 37 \times 67$. Omdat geldt $p - q = 7$, hebben *p* en *q* hoogstens nog als gemeenschappelijke deler het getal 7, maar omdat die factor niet in het k.g.v. van de getallen zit, hebben ze alleen 1 als gemeenschappelijke deler. Dus is $2 \times 37 \times 67$ het product van p en *q*. Dus moet gelden: $p = 74$ en $q = 67$. De enige oplossing is: $m = 1998$ en $n = 1809$.



4

a Noem het snijpunt van AC en BD S. Dan geldt:
$AB^2 = AS^2 + BS^2$ en
$CD^2 = CS^2 + DS^2$. Ook geldt:
$BC^2 = BS^2 + CS^2$ en
$DA^2 = DS^2 + AS^2$. Dus:
$AB^2 + CD^2 =$
$AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2 =$
$BC^2 + DA^2$.

b Veronderstel dat QS en PR niet loodrecht op elkaar staan. Dan zijn de projecties op QS van P en R, twee verschillende punten, noem ze X en Y.
Uit $PQ^2 + RS^2 = QR^2 + SP^2$ volgt
$(PX^2 + QX^2) + (RY^2 + SY^2) =$
$(QY^2 + RY^2) + (SX^2 + PX^2)$,
dus
$QX^2 + SY^2 = QY^2 + SX^2$.
Als X dichter bij S ligt dan Y, dan
$QX > QY$ en $SY > SX$ en dus
$QX^2 + SY^2 > QY^2 + SX^2$.
Als Y dichter bij S ligt dan X, dan
$QX < QY$ en $SY < SX$ en dus
$QX^2 + SY^2 < QY^2 + SX^2$.
Dat betekent dat $X = Y$.

5 Noem $x + 1998 = y$, dan wordt de vergelijking: $(y - 3) \cdot (y - 1) \cdot (y + 1) \cdot (y + 3) + 16 = 0$.
Dat is te herleiden tot
$(y^2 - 9) \cdot (y^2 - 1) + 16 =$
$y^4 - 10y^2 + 9 + 16 =$
$y^4 - 10y^2 + 25 = 0$. Dus
$y^4 - 10y^2 + 25 = (y^2 - 5)^2 = 0$.
Gevolg: $y^2 = 5$ en dus $y = \pm\sqrt{5}$.
De oplossingen van de vergelijking zijn dus $-1998 + \sqrt{5}$ en $-1998 - \sqrt{5}$.

40 jaar geleden

Didactische Revue door *Dr. Joh. H. Wansink*

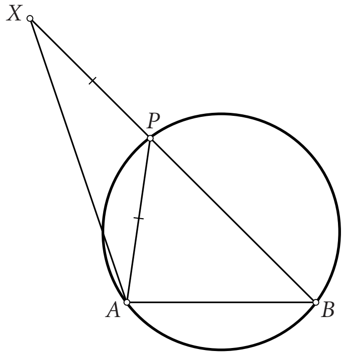
Modernisering van het wiskunde-programma

In aflevering 3 van deze jaargang staat een artikel van prof.dr. J.C.H. Gerrretsen, getiteld '*Doelstelling van het wiskunde-onderwijs*', dat om meer dan één reden de aandacht van de lezers van Euclides verdient. Ik wijs hier op dit artikel, omdat het een klemmend betoog bevat voor een radicalere herziening van het wiskunde-programma voor onze scholen dan in 1958 in de geest van de Wimecos-voorstellen werd gerealiseerd. Aan het einde van bedoeld artikel (blz. 93-94) stelt de auteur de vraag: 'Zijn de leraren in staat een nieuw leerplan te ontwerpen, dat voldoende is afgestemd op de eisen die de maatschappij stelt, rekening houdt met opvoedkundige idealen en voorts nauwer dan tot dusver het geval is verband houdt met levende wetenschap? Waarschijnlijk zal een dergelijke opgaaf slechts in internationaal verband tot een goed einde kunnen worden gebracht, want de problemen zijn voor alle landen van West-Europa analoog'.
De bedoeling van deze Revue is te laten zien dat de roep om een nieuw leerplan in progressieve geest zich in binnen- en in buitenland reeds bij herhaling doet horen.

De belangstelling voor een 'modern leerplan' is dit jaar in ons land o.a. tot uitdrukking gekomen in de tiende prijsvraag door het Wiskundig Genootschap uitgeschreven, en opgenomen in het aprilnummer van het *Nieuw Archief voor Wiskunde.*
De opgaaf luidde:
'Gevraagd wordt, systematisch de mogelijkheid te onderzoeken, het wiskunde-onderwijs op de middelbare school aan de hedendaagse behoeften en hedendaagse opvoedkundige methoden aan te passen.'

Uit: Euclides 34 (1958-1959), blz. 165

Werkblad

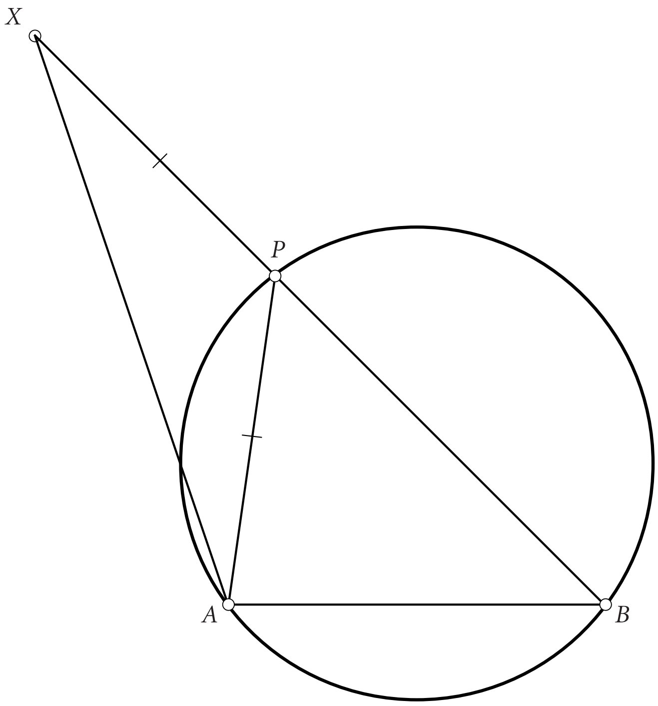


Opgave 4 Een cirkelbeweging

Gegeven is een cirkel met koorde *AB*.
Het punt *P* ligt op de cirkel.
Het punt *X* ligt op het verlengde van *BP* zodanig dat driehoek *AXP* gelijkbenig is met *P* als top (dus met *AP* en *XP* als gelijke zijden).
Als *P* de in figuur 2 dik getekende boog *AB* doorloopt, beschrijft *X* een baan in het vlak.

6p **5** ☐ Bewijs dat de baan van *X* een deel van een cirkel is.

6p **6** ☐ Teken nauwkeurig de baan van *X* in onderstaande figuur.



Uit: het examen vwo Wiskunde B Profi tijdvak 2, juni 1998

Werkblad

Opgave 6 Een recursie-proces

De functie f is gegeven door: $f(x) = 4x(1 - x)$.
Deze functie gebruiken we nu bij een recursie-proces.
We bekijken namelijk de rijen u_0, u_1, u_2, ... waarvoor geldt:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

voor $n = 0, 1, 2, \ldots$
Het gedrag van zo'n rij is afhankelijk van de waarde van de beginterm u_0.

Als u_0 in het interval [0,1] ligt, dan liggen alle termen van de rij in [0, 1].

6p **8** □ Hoe kun je dat verklaren?

5p **9** □ Voor welke waarden van u_0 is $u_0, u_1, u_2, \ldots$ een constante rij? Licht je antwoord toe.

Uit het volgende zal blijken dat u_0 zo gekozen kan worden dat de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ periodiek is. Dat heeft te maken met de volgende eigenschap van de functie f:

als $x = \sin^2 p$, dan $f(x) = \sin^2(2p)$

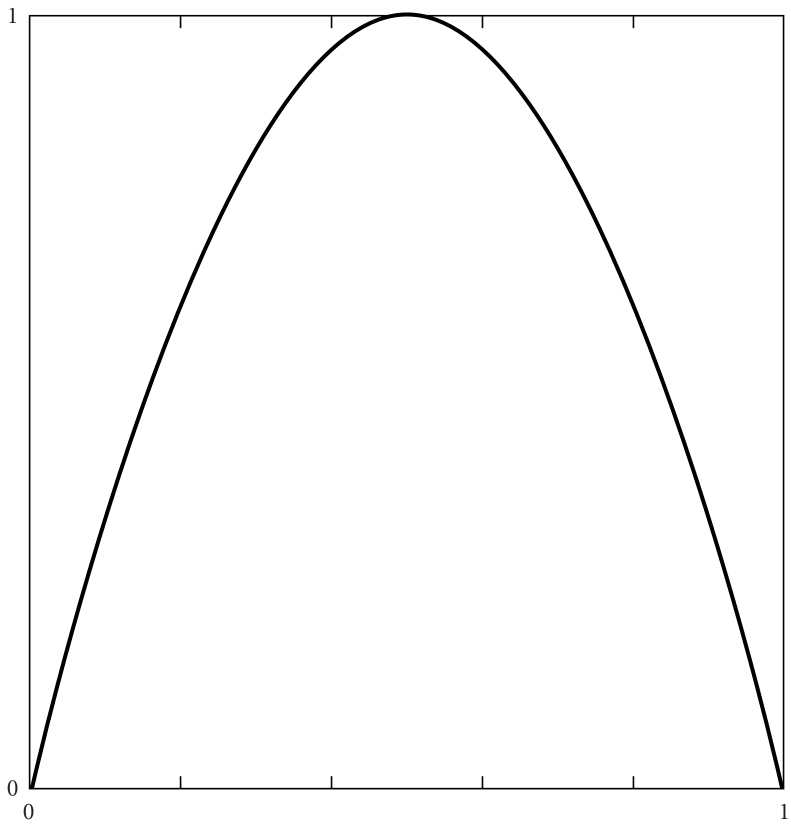
6p **10** □ Bewijs deze eigenschap.

Als $u_0 = \sin^2(\frac{1}{9}\pi)$, dan is u_0, u_1, u_2, ... een periodieke rij.

6p **11** □ Toon dit aan met behulp van genoemde eigenschap.

In de situatie van vraag 11 vertoont de web-grafiek van het recursie-proces een cyclus.

4p **12** □ Teken deze cyclus zo nauwkeurig mogelijk in de figuur hieronder.



Uit: het examen vwo Wiskunde B Profi tijdvak 2, juni 1998

Recreatie

Opgave 691

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Er zijn vele manieren om kinderen aan getallen te wennen. De rekenboekjes van de basisschool laten ons dat duidelijk zien. Daarna komt de ontbinding van getallen ter sprake. Ook hiermee kan dan weer flink geoefend worden.

Dit kan ook in een spelvorm tussen twee personen A en B gegoten worden. A maakt met de 10 verschillende cijfers 5 getallen van twee cijfers. Een getal mag met nul beginnen. B probeert deze 5 getallen te achterhalen door vragen te stellen aan A.
Bijvoorbeeld: 'Hoeveel getallen zijn deelbaar door 5?' A beantwoordt deze vraag en B stelt opnieuw een vraag.
Als A de 5 getallen 05, 23, 41, 67 en 89 gemaakt zou hebben en B zou vragen 'Hoeveel getallen zijn ondeelbaar?', dan antwoordt A 'vijf' en B kan nooit achter de 5 getallen komen, want ook 05, 29, 47, 61 en 83 voldoet aan deze beschrijving.

Onlangs werd het volgende spel gespeeld:

'Hoeveel getallen zijn ondeelbaar?'	Antwoord: 0
'Hoeveel getallen zijn deelbaar door 2?'	Antwoord: 4
'Hoeveel getallen zijn deelbaar door 3?'	Antwoord: 3
'Hoeveel getallen zijn deelbaar door 4?'	Antwoord: 3
'Hoeveel getallen zijn deelbaar door 5?'	Antwoord: 1
'Hoeveel getallen zijn deelbaar door 6?'	Antwoord: 2
'Hoeveel getallen zijn deelbaar door 7?'	Antwoord: 1
'Hoeveel getallen zijn deelbaar door 8?'	Antwoord: 2
'Hoeveel getallen zijn deelbaar door 9?'	Antwoord: 1
'Hoeveel getallen zijn deelbaar door 10?'	Antwoord: 1
'Hoeveel getallen zijn deelbaar door 12?'	Antwoord: 2
'Hoeveel getallen zijn deelbaar door 13?'	Antwoord: 1
'Hoeveel getallen zijn deelbaar door 14?'	Antwoord: 1

En nu kunt u beredeneren wat de 5 getallen van 2 cijfers waren, bestaande uit alle 10 cijfers 0 tot en met 9. (Deelbaarheid door 11 is natuurlijk onmogelijk!)
Als u de oplossing vindt en binnen een maand instuurt, ontvangt u 5 punten voor de doorlopende ladderwedstrijd.

Oplossing 688

Gezien de reacties heeft men ‘Number Place’ erg gewaardeerd. Na een aantal doodlopende wegen en systematisch blijven werken, vindt men dan toch nog de unieke oplossing.

In een 9 × 9 vierkant moet men getallen invullen zodanig dat in elke horizontale rij, in elke verticale kolom en in elk vet omkaderd vierkantje alle getallen 1 tot en met 9 precies één keer voorkomen.
Hierbij waren de vet gedrukte getallen reeds gegeven.

De unieke oplossing is dan:

7	8	2	1	**4**	3	9	6	**5**
1	3	4	**5**	6	**9**	7	8	2
6	5	**9**	8	2	7	**1**	4	3
4	1	5	**3**	9	**6**	8	2	**7**
9	**2**	3	7	**8**	1	6	**5**	4
8	6	7	**2**	5	**4**	3	9	**1**
2	7	**6**	9	3	5	**4**	1	8
3	4	8	**6**	1	**2**	5	7	9
5	1	9	4	**7**	8	2	3	**6**

In die Japanse boekjes zijn intussen vele varianten gepubliceerd. Soms gaat men tot 16 × 16 vierkanten en de getallen 1 tot en met 16.
Ook laat men gedeelten van verschillende vierkanten overlappen. Dan moet men meerdere richtingen in de gaten houden om te zorgen dat de getallen 1 tot en met 9 gebruikt zijn.
Gelukkig hoeft men geen Japans te kunnen lezen: aan de oplossing achterin ziet men wat de bedoeling was.

Met 68 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 50,–:

Ad Boons
Luchthavenlaan 22
5042 TD Tilburg

Heel hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in dit schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
6	01-04-99	18-02-99
7	17-05-99	01-04-99
8	24-06-99	13-05-99

Data nieuwe schooljaar
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur: cph@xs4all.nl

Wat en waar is wiskunde III
Uitzenddata 1999
1 woensdag 3 maart 9.30 uur
2 woensdag 10 maart 9.30 uur
3 woensdag 17 maart 9.30 uur
4 woensdag 24 maart 9.30 uur
Allemaal achtereen: donderdag 25 maart 10.30 uur Duur: 80 minuten
Zie ook blz 158.

School en Computer 1999 Regionale ICT-onderwijs Dagen
17 maart Groningen, Martinihal
24 maart Eindhoven, Evoluon
31 maart Zwolle, IJsselhallen
7 april Amsterdam, RAI
14 april Nijmegen, Triavium
21 april Rotterdam, Erasmus Expo
Openingstijden: 12.00 - 17.00 u.
De toegang is gratis.
website: www.ess.nl
Zie ook blz. 162

Kangoeroe 1999
vrijdag 19 maart 1999
Jan Donkers
040-2472738
jand@win.tue.nl
Aankondiging volgt later

Panama-conferentie
do. 25 + vr. 26 maart 1999
NVORWO
030-2611611
panama@fi.uu.nl

Nederlands Mathematisch Congres 1999
do. 8 en vr. 9 april 1999
met lerarensymposium over
'Meetkunde: vaardigheden en bewijzen'
op vr. 9 april 12.10 - 15.45 u.
www.math.uu.nl/mc99 of mc99@math.uu.nl

Wiskunde Olympiade 1999
Eerste ronde
vrijdag 9 april 1999
Fred Bosman
026-3521294
Fred.Bosman@cito.nl
Aankondiging volgt later

Examendata
vbo/mavo C/D:
di. 18 mei 1999
havo wiskunde A:
ma. 17 mei 1999
havo wiskunde B:
wo. 26 mei 1999
vwo wiskunde A:
do. 27 mei 1999
vwo wiskunde B:
do. 20 mei 1999

Studiedag Historische Kring
zaterdag 29 mei 1999
HKRWO
Ed de Moor
030 - 2611611

9th International Congress on Mathematical Education (ICME)
31/6/00 - 6/8/00
Tokyo, Japan
www.ma.kagu.sut.ac.jp/~icme9/

Internetsites voor wiskundedocenten:

NVvW website
Bezoek regelmatig de website van de NVvW. Boordevol actuele informatie
www.euronet.nl/~nvvw

Archief WiskundE-brief
skyline.www.cistron.nl/wiskunde/brief/wb_main.htm

Ook voor leerlingen
Prachtige wiskunde op:
www-groups/dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html
Euclid's Elements:
aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html
Fractals
www.research.ibm.com/research/fractaltop.html

Mathematical Association of America
www.maa.org

Wiskunde Olympiade
olympiads.win.tue.nl/nwo

School en Computer 1999 Regionale ICT-onderwijs Dagen
www.ess.nl

Wiskunde-nieuwsgroep
Voor de puzzelaars:
alt.math.recreational

Suggesties voor interessante sites graag zenden aan Kees Hoogland
e-mail: cph@xs4all.nl

Adv. Casio

herhalen uit
Euclides 74/4
omslag pag. III